

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas



Grado en Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático

# JUEGOS DE EVASIÓN

Trabajo de Fin de Grado

Alberto Japón Sáez

**Director:** Genaro Lopez Acedo

**Colaborador:** Manuel Silva Zurita

(Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla)

Sevilla, [20/06/2016]





# Índice general

Abstract	III
Introducción: Juegos de Evasión	v
Introducción: Parque Matemático	vii
<b>1. El Problema de los Traficantes</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento . . . . .	1
1.2. Resolución . . . . .	2
1.3. Adaptación del Problema al Parque . . . . .	8
<b>2. El Problema de la Chica en el Lago</b>	<b>13</b>
2.1. Planteamiento . . . . .	13
2.2. Resolución . . . . .	14
2.2.1. Notas previas . . . . .	14
2.2.2. Solución al Problema Enunciado . . . . .	14
2.2.3. Solución para valores ”grandes” de $\alpha$ . . . . .	17
2.2.4. Soluciones para valores ”pequeños” de $\alpha$ . . . . .	18
2.3. Adaptación del Problema al Parque . . . . .	22

<b>3. El Problema del Camino Seguro</b>	<b>25</b>
3.1. Planteamiento . . . . .	25
3.2. Resolución . . . . .	26
3.3. Adaptación del Problema al Parque . . . . .	32
<b>4. El Problema de la Persecución Triangular</b>	<b>35</b>
4.1. Planteamiento . . . . .	35
4.2. Resolución . . . . .	36
4.3. Adaptación del Problema al Parque . . . . .	42
<b>5. El Problema del Pato y el Perro</b>	<b>45</b>
5.1. Planteamiento . . . . .	45
5.2. Resolución . . . . .	46
5.3. Adaptación del Problema al Parque . . . . .	56
<b>6. El Problema del Monstruo y la Princesa</b>	<b>57</b>
6.1. Planteamiento . . . . .	57
6.2. Descripción . . . . .	58
6.3. Adaptación al Parque . . . . .	62
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Abstract

The goals of the work are twofold.

The first one is about the background of mathematics of pursuit and evasion, models that are known as Chases and Escapes games. Five problems are solved using classic techniques from Mathematic Analysis, and a sixth one of a different nature where its solution is described from a probabilistic point of view.

The second one, of divulgative character and realized in colaboration with an Architecture student, consists in the design of a real park where the problems mentioned before can be brought into practise. The park, which is supposed to be placed in Seville, becomes as an idea to bring closer the world of mathematics to people from the city throughout a pleasant experience, showing that mathematics attached to a logical reasoning are a powerfull tool.



# Introducción: Juegos de Evasión

Desde un punto de vista matemático lo que entendemos por Juegos de Evasión no es más que la modelización y propuesta de resolución de problemas en los que se plantea una situación de persecución.

Numerosos fenómenos naturales pueden ser descritos como la persecución entre dos puntos en movimiento. Cuando un felino persigue a su presa, cuando una persona corre detrás de un autobús, o cuando unos jugadores corren tras un balón, de forma casi inconsciente piensan cual es la estrategia óptima para alcanzar a su objetivo.

En algunos problemas la solución consiste en encontrar la curva que el perseguidor debe describir para capturar a su objetivo. En otros el objetivo es encontrar la curva que el perseguido debe seguir para no ser capturado. Por la naturaleza de este tipo de problemas, la resolución se suele llevar a cabo utilizando herramientas propias de la Geometría y el Análisis Matemático.

En algunos casos se utilizan conceptos que aparecen en la Teoría de Juegos pues tienen como objetivo describir estrategias óptimas para el perseguidor y el perseguido. La resolución de muchos de estos tiene que hacerse mediante herramientas probabilísticas, pasando la Geometría y el Análisis Matemático a un segundo plano.

Los Juegos de Evasión han estado presentes desde el comienzo de la historia de las matemáticas. El ejemplo más relevante aparece en la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga.

Zenón planteaba una carrera entre el más rápido de los hombres, Aquiles, y una tortuga. En la carrera Aquiles le daba una ventaja inicial a la tortuga, y Zenón defendía que nunca llegaría a alcanzar a dicha tortuga ya que cuando éste recorría la ventaja inicial la tortuga había avanzado obteniendo una nueva ventaja.

Algunos historiadores de las matemáticas sitúan el inicio de la matemática moderna los Juegos de Evasión en uno de los trabajos de Leonardo da Vinci. Sin embargo la gran mayoría de estos datan dicho origen en un problema planteado y resuelto por el matemático francés Pierre Bouguer (1698-1758) en 1732. El problema trataba sobre un barco pirata que pretendía abordar a un barco mercante que avanzaba en línea recta. La originalidad del problema residía en la estrategia de la persecución ya que en lugar de avanzar en línea recta prediciendo un punto de intersección entre las naves, los piratas perseguían al barco mercante apuntando siempre hacia el punto donde éste se encontraba, lo que se denominó persecución directa.

Los juegos de Evasión tienen numerosas aplicaciones en campos muy variados. En estrategia militar donde las curvas de persecución desempeñaban un papel clave en el éxito del lanzamiento de misiles, en Robótica para implementar movimientos óptimos en autómatas, en Medicina para neutralizar organismos dañados, en Ingeniería Espacial optimizando movimientos de aeronaves... lo anterior, unido al interés matemático de los problemas hacen que sea un campo activo de investigación en el que existen numerosos problemas abiertos.

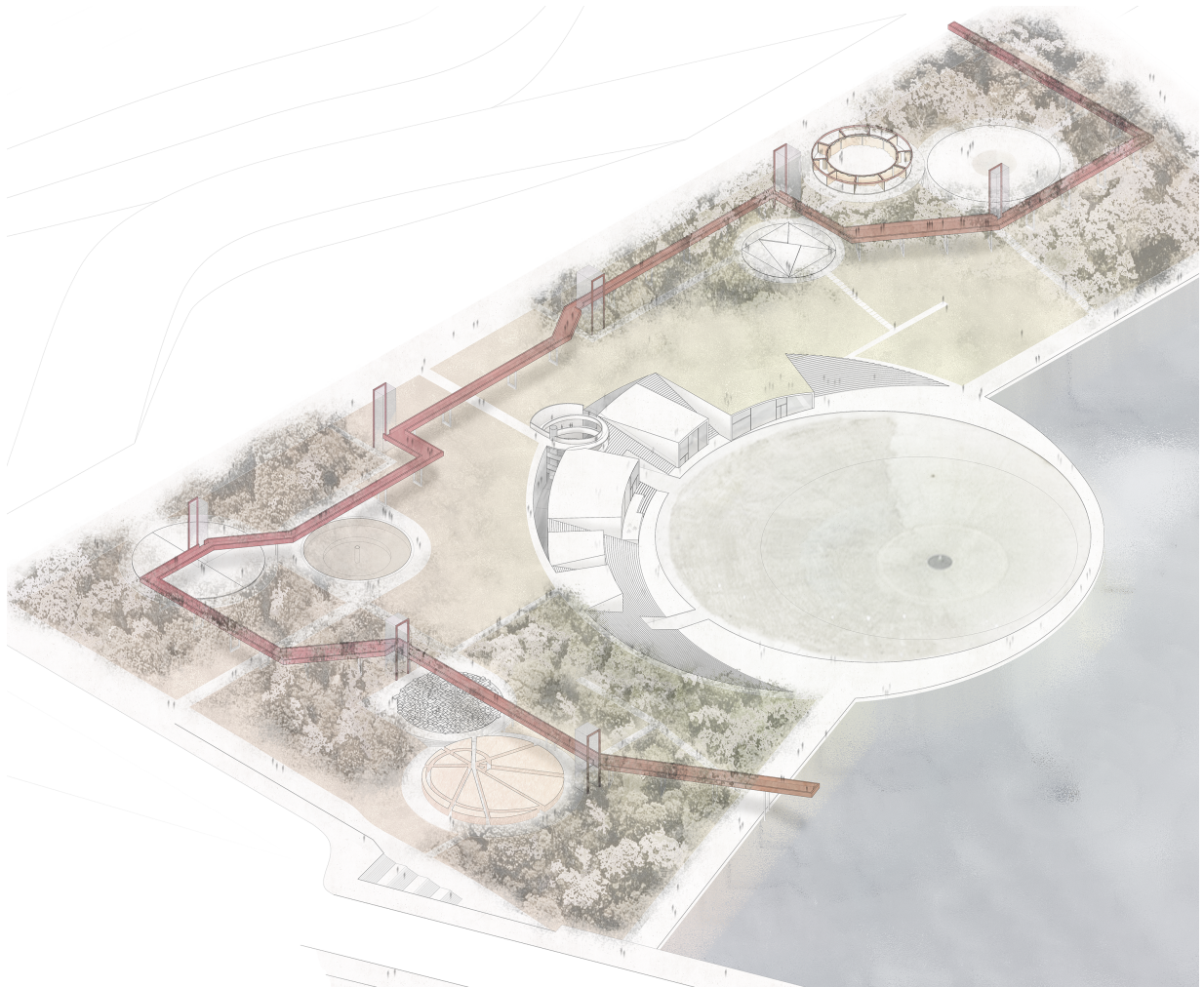
# Introducción: Parque Matemático

En el trabajo se desarrollan seis problemas de persecución. Como complemento a este trabajo teórico se ha planteado, con la colaboración de un estudiante de arquitectura, un proyecto de carácter divulgativo para llevar a la práctica una simulación de estos problemas.

El proyecto divulgativo consiste en el diseño de un parque en la ciudad de Sevilla en el que cada problema tiene asignada una instalación donde se simulan las situaciones de persecución descritas en el problema. Cada instalación posee carteles donde se explica el planteamiento de los problemas, las instrucciones a seguir por perseguido/perseguidor y la solución. Además todas las instalaciones están conectadas por una pasarela elevada que crea un recorrido aéreo por el parque desde la cual pueden observarse los juegos.

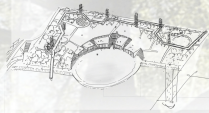
Con la realización de los juegos se pretende acercar más a las personas al mundo matemático, haciendo ver que una buena estrategia suele llevar a mejores resultados. De los seis problemas, en los tres primeros y en el último los jugadores tienen que tomar decisiones sobre que estrategias seguir, los otros dos son comprobaciones de hechos que resultan interesantes. Además hay una instalación más en la que se anima a las personas a inventar sus propios juegos.

Los capítulos del trabajo se estructuran según: Planteamiento, Resolución y Adaptación al Parque. Así tras la resolución teórica de un problema se explicará en detalle en que consiste su instalación asignada.





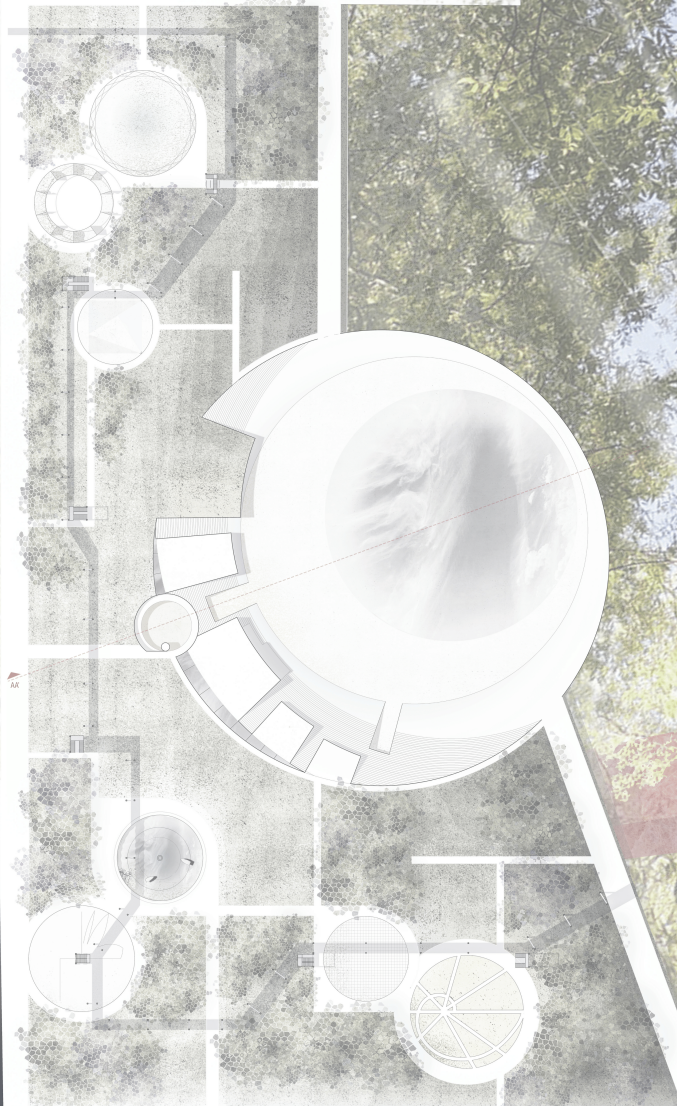
Los juegos matemáticos distribuidos: lo largo del parque se comunican a varios niveles, y cada uno persigue una lógica distinta. El primer nivel viene dado por los propios juegos. Estos se insertan de manera más o menos aleatoria, simplemente organizados de forma intuitiva, distribuyendo tensiones a lo largo del parque y siempre teniendo en cuenta el edificio-gradiente vocado a la gran forma de agua que es también una plaza. El último nivel debe ser controlado en su lugar y a que ante esta aleatoriedad necesitemos un elemento de control, y para esto introducimos los hitos que revelan la posición de los juegos desde larga distancia. Se distribuyen de forma ortogonal, otorgando al jardín de un sistema de referencia y un ritmo claro y ordenado. Para dar cohesión a estos dos mundos, el de la libertad y el del orden, surgen los caminos y la pérgola. Los caminos forman parte del sistema de distribución y acceso al parque, la conexión con el mundo urbano. La pérgola es un sistema propio del parque, pone en relación los juegos y otorga nuevas perspectivas. A través de los hitos, accedemos a este nivel de la pérgola e iniciamos el recorrido elevado de los juegos.



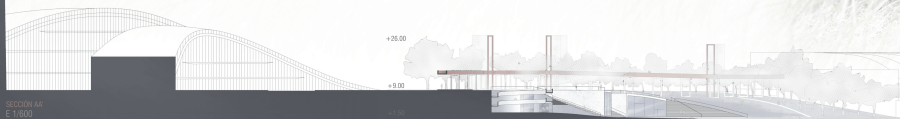
En la planta que tenemos abajo observamos la sombra de la pérgola que recorre el parque, seccionando por sus pilares.

E: 1/600

+9.00 +8.00 +7.00 +6.00 +5.00 +4.00 +3.00 +2.00 +0.00

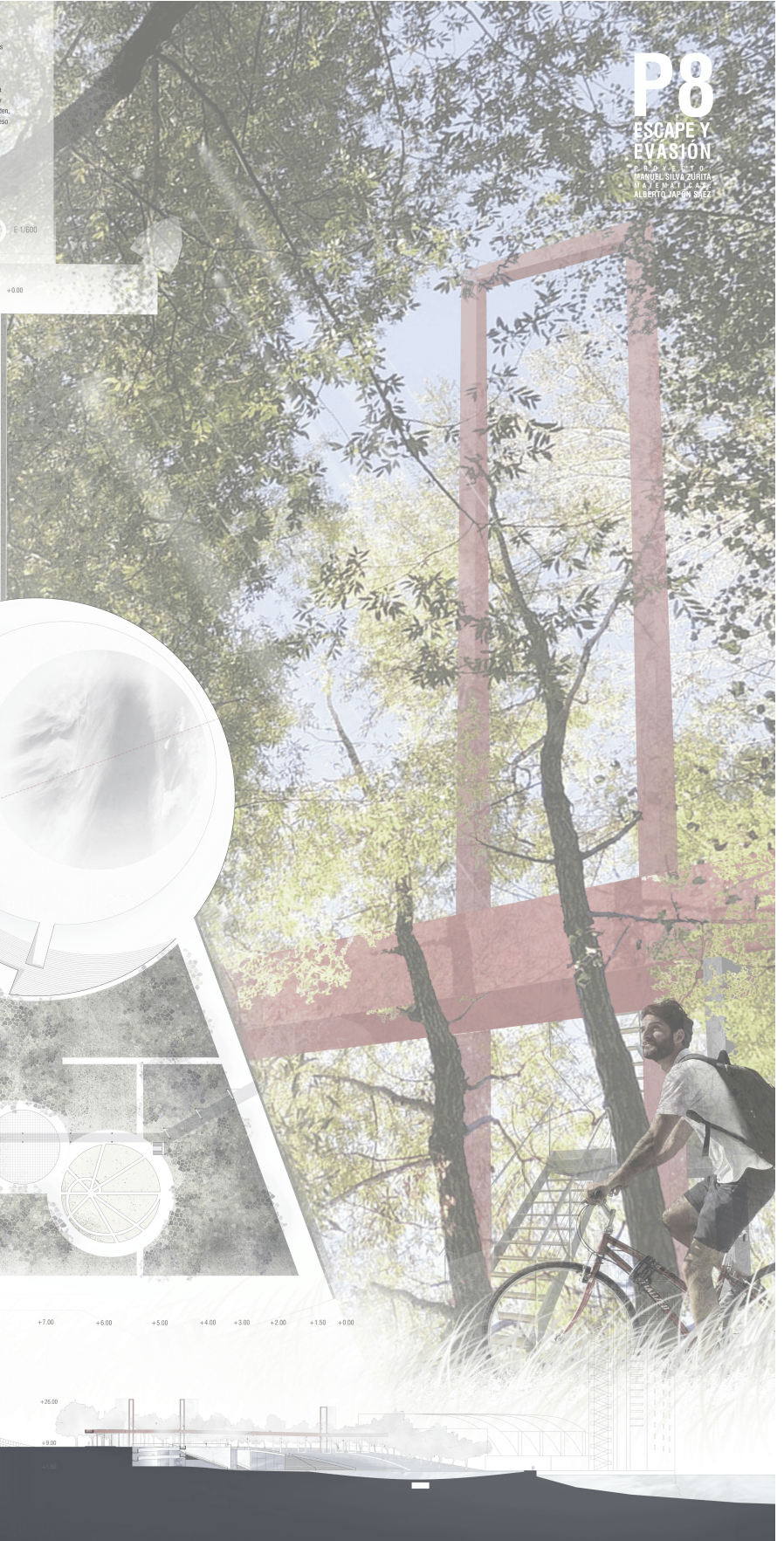


+9.00 +8.00 +7.00 +6.00 +5.00 +4.00 +3.00 +2.00 +1.50 +0.00



SECCIÓN AX  
E: 1/600

**P8**  
ESCAPE Y  
EVASION  
PROYECTO  
MANUEL SILVA ZURITA  
WALTER LACAY  
ALBERTO JAPÓN BEE





# Capítulo 1

## El Problema de los Traficantes

### 1.1. Planteamiento

Una lancha de policía quiere detener a una lancha de traficantes de ron que pretende escapar por mar abierto. Las dos barcas se encuentran inicialmente en el mismo puerto, sin embargo los traficantes son los primeros en salir, avanzando en línea recta, logrando una ventaja inicial de 4 millas. En el momento que alcanzan dicha ventaja los policías salen del puerto, levantándose una fuerte niebla que hace que el radio de visión se reduzca a unos pocos metros, perdiendo así de vista a los traficantes. Aprovechándose de esta niebla, los traficantes avanzarán en línea recta en alguna dirección, para alejarse lo máximo posible de la última posición en la que fueron vistos.

Suponiendo que ambas lanchas se mueven a velocidad constante, si la lancha de policía es 3 veces más rápida que la lancha de traficantes, ¿es posible que los policías capturen a "ciegas" a los traficantes?



## 1.2. Resolución

La respuesta al problema planteado es afirmativa. Existe una estrategia que garantiza la captura de los traficantes por parte de los policías.

Antes de comenzar denotaremos por  $LT$  a la lancha de traficantes y  $v_T$  a la velocidad de dicha lancha. Análogamente para la lancha de policías  $LP$  y  $v_P$ . Además  $d$  será la distancia que separa a las dos lanchas en el instante inicial.

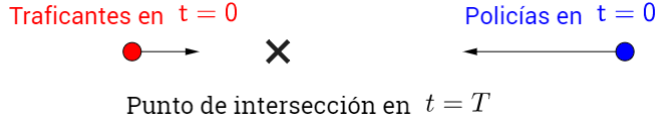
Lo primero que haremos será establecer un sistema de coordenadas cartesianas de manera que en el instante inicial (cuando se levanta la niebla)  $LT$  se encuentra en el punto  $(0,0)$ , y  $LP$  en  $(d,0)$ . Establecido el sistema de coordenadas, es claro que en caso de ocurrir la captura, la distancia de ambos al origen será la misma.

Para un instante de tiempo  $t$ , sabemos que  $LT$  se encontrará a una distancia  $v_T t$  del origen, en alguna dirección. Por lo tanto, cualquiera que sea la estrategia que siga  $LP$ , ésta debe encontrarse a una distancia  $v_T t$  del origen, si  $t$  es el tiempo de la captura. El problema reside entonces en conocer la dirección en la que debe estar  $LP$  en dicho instante. La intuición nos lleva a pensar que tendría que pasar por todas las direcciones, de manera que pasase por cada dirección en el momento en el que pasase  $LT$  si hubiese tomado dicha dirección.

Lo primero que  $LP$  debe hacer es dirigirse en la dirección  $(-d,0)$ , apuntando hacia el punto donde  $LT$  fue visto por última vez, hasta llegar al punto donde habría de estar  $LT$  si la dirección que hubiese tomado fuese  $(d,0)$  (esto tiene poco sentido por parte de  $LT$ , ya que sería volver sobre sus pasos en dirección al puerto, pero aún así es un caso a tener en cuenta). Si al llegar a dicho punto se encuentra con  $LT$  la captura habrá terminado, en caso contrario  $LP$  deberá realizar una espiral creciente en radio respecto al origen.



Supongamos el caso en el que LT toma la dirección (d,0).  
Entonces si llamamos  $t = T$  al tiempo de captura, es claro que  $v_T T + v_P T = d$



Despejando obtenemos que el punto se alcanza en un tiempo  $T = \frac{d}{v_T + v_P}$ , entonces LP habrá recorrido una distancia

$$v_P T = v_P \frac{d}{v_T + v_P} = d \frac{v_P/v_T}{1 + (v_P/v_T)}$$

Y se encontrará respecto al origen a una distancia

$$d - d \frac{v_P/v_T}{1 + (v_P/v_T)} = \frac{d}{1 + (v_P/v_T)}$$

Ahora bien, si la captura no ocurre en dicho punto, es decir LT avanza en otra dirección. Entonces LP comenzará a describir su movimiento en espiral, cuyo vector posición será

$$\rho(t) = \frac{d}{1 + (v_P/v_T)} \cdot \frac{t}{T} e^{i\theta(t)}, t \geq T$$

Para una función  $\theta(t)$  a determinar. Que debe verificar  $\theta(T) = 0$ , puesto que LP se encuentra en el eje x en  $t = T$ .

Antes de buscar la función  $\theta(t)$ , veamos que la expresión anterior de  $\rho(t)$  puede simplificarse, sustituyendo del valor de  $T$

$$\rho(t) = \frac{d}{1 + (v_P/v_T)} \cdot \frac{t}{d/(v_T + v_P)} e^{i\theta(t)} = \frac{v_T}{v_T + v_P} t (v_T + v_P) e^{i\theta(t)} = v_T t e^{i\theta(t)}, t \geq T \quad (1.1)$$

Podemos observar que  $\forall t \geq T$  las dos lanchas se encuentran a la misma distancia al origen, puesto que  $|\rho(t)| = |v_T t e^{i\theta(t)}| = v_T t |e^{i\theta(t)}| = v_T t$ .

Por otro lado, derivando (1.1) respecto a  $t$  obtenemos el vector velocidad de LP

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = v_T e^{i\theta(t)} + i v_T t e^{i\theta(t)} \frac{d\theta(t)}{dt}, t \geq T$$

Además, dado que el módulo de dicho vector es igual a  $v_P$ , se tiene que

$$\left| \frac{d\rho(t)}{dt} \right|^2 = v_P^2$$

de donde,

$$\begin{aligned} \frac{v_P^2}{v_T^2} = & \cos^2(\theta(t)) - 2t\cos(\theta(t))\sen(\theta(t))\frac{d\theta(t)}{dt} + t^2\sen^2(\theta(t))\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 + \sen^2(\theta(t)) \\ & + 2t\cos(\theta(t))\sen(\theta(t))\frac{d\theta(t)}{dt} + t^2\cos^2(\theta(t))\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

y simplificando,

$$v_P^2 = v_T^2 \left[ 1 + t^2 \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right]$$

Despejando ahora  $\frac{d\theta(t)}{dt}$  obtenemos

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1}}{t}$$

e inmediatamente, integrando respecto de t

$$\theta(t) = \sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1} \ln(t) + C, t \geq T$$

siendo C la constante de integración.

Nótese además que hemos tomado el signo positivo de la raíz, aunque también podríamos haber escogido el signo negativo. Es decir, el giro de la espiral será en sentido anti horario.

Para averiguar el valor de C utilizaremos la condición  $\theta(T) = 0$ , de manera que si denotamos  $\lambda = \sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1}$ , tendremos  $\lambda \ln(T) + C = 0$ , de donde despejamos  $C = -\lambda \ln(T)$ , y finalmente llegamos a  $\theta(t) = \lambda \ln(t) - \lambda \ln(T) = \lambda \ln(t/T)$ . De donde podemos despejar t

$$t = T e^{\theta/\lambda}$$

Además cómo sabemos que,  $\forall t \geq T$ , LP se encuentra a una distancia del origen  $r = v_T t$ , sustituyendo el valor de  $t$

$$r = v_T T e^{\theta/\lambda}$$

y por último, sustituyendo los valores de  $T$  y  $\lambda$  obtenemos la siguiente ecuación en coordenadas polares  $(r, \theta)$ .

$$r = v_T \frac{d}{v_T + v_P} e^{\theta/\sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1}}$$

o bien

$$r = \frac{d}{1 + v_P/v_T} e^{\theta/\sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1}}$$

En particular, para nuestro problema tenemos que  $v_P/v_T = 3$  y  $d = 4$ , luego la trayectoria a seguir por LP, transcurrido el tiempo  $T$ , para garantizar la captura de LT vendrá dada por la ecuación

$$r = e^{\theta/\sqrt{8}}$$

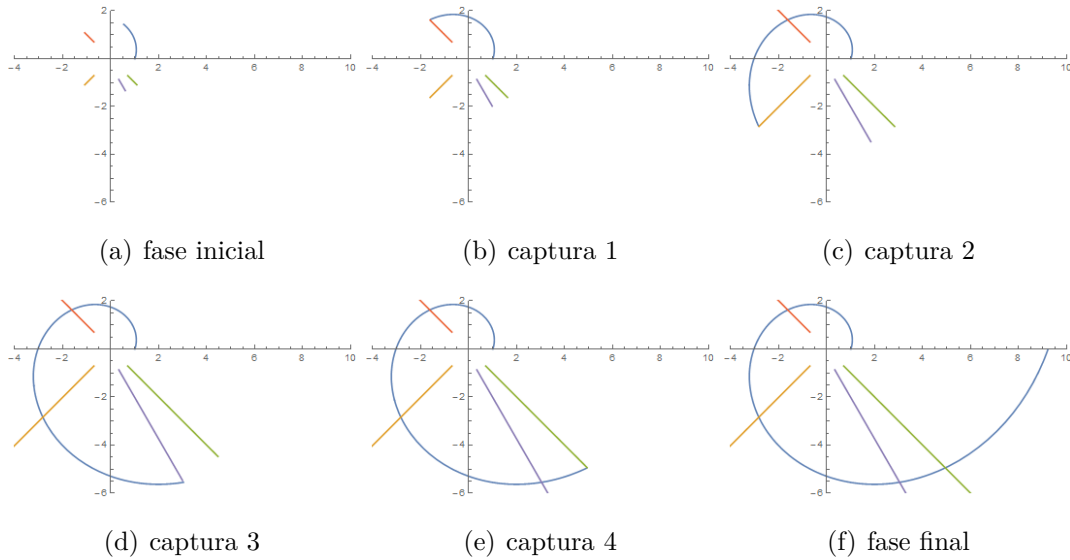


Figura 1.1: Segunda fase de la persecución de 4 posibles trayectorias de LT.

## Tiempo de Captura

Como podemos ver de la expresión

$$r = \frac{d}{1 + v_P/v_T} e^{\theta/\lambda}, \quad \lambda = \sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1}$$

Sabemos que siempre que  $v_P/v_T > 1$  existe una trayectoria que garantiza la captura de LT.

Una cuestión interesante es conocer como se ve afectado el tiempo de la captura en función de  $v_P/v_T$ , lo que equivale a conocer el tiempo que se tarda en recorrer la espiral al completo para cada  $v_P/v_T > 1$  (puesto que en el peor de los casos la captura se da al haber recorrido casi toda la espiral).

Vamos a calcular primero la longitud de la espiral en el intervalo  $\theta \in [0, 2\pi)$ . En coordenadas polares, el diferencial de longitud verifica  $(dl)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2$ . Por lo tanto, la longitud de la espiral viene dada por

$$\int dl = \int \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2} = \int d\theta \sqrt{(dr/d\theta)^2 + r^2}$$

además

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{e^{\theta/\lambda}}{1 + (v_P/v_T)} = \frac{r}{\lambda}$$

Así la longitud de la espiral en el intervalo  $\theta \in [0, 2\pi)$  será

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{\frac{r^2}{\lambda^2} + r^2} &= \int_0^{2\pi} r d\theta \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + 1} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{\theta/\lambda}}{1 + (v_P/v_T)} = \\ &= \frac{d\sqrt{1 + \lambda^2}/\lambda}{1 + (v_P/v_T)} \lambda \cdot [e^{\theta/\lambda}]_0^{2\pi} = \frac{d\sqrt{1 + \lambda^2}}{1 + (v_P/v_T)} \cdot (e^{2\pi/\lambda} - 1) \end{aligned}$$



Sustituyendo ahora  $\sqrt{1 + \lambda^2} = \sqrt{1 + (v_P/v_T)^2 - 1} = v_P/v_T$  tenemos que la distancia recorrida por LP sería

$$\frac{d(v_P/v_T)}{1 + (v_P/v_T)}(e^{2\pi/\lambda} - 1)$$

y tardará un tiempo en recorrerla,  $\hat{T}$ , de

$$\hat{T} = \frac{\frac{d(v_P/v_T)}{1 + (v_P/v_T)}}{v_P}(e^{2\pi/\lambda} - 1) = \frac{d}{v_P + v_T}(e^{2\pi/\lambda} - 1)$$

Además como  $T = \frac{d}{v_P + v_T}$  podemos simplificar la expresión anterior, de manera que:  $\hat{T} = T(e^{2\pi/\lambda} - 1)$ .

Por lo tanto el tiempo final ( $T_F$ ) de la persecución será  $\hat{T} + T$ . Es decir el tiempo que tarda LP en recorrer su primer tramo en línea recta, más el que tarda en recorrer la espiral.

$$T_F = \hat{T} + T = T(e^{2\pi/\lambda} - 1) + T = T(e^{2\pi/\lambda} - 1) = \frac{d}{v_T} \cdot \frac{e^{2\pi/\lambda}}{1 + (v_P/v_T)}$$

y si sustituimos el valor de  $\lambda$

$$T_F = \frac{d}{v_T} \cdot \frac{e^{2\pi/\sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1}}}{1 + (v_P/v_T)}$$

Ahora bien, si fijamos un valor de  $v_T$  y consideramos  $T_F$  como función de  $v_P$ , siendo  $0 < v_T < v_P$ , se tiene que

$$T'_F(v_P) = \frac{d}{v_T} \cdot \frac{e^{2\pi/\sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1}}}{(1 + (v_P/v_T))^2} \cdot \left[ - \left( \frac{2\pi}{(v_P/v_T)^2 - 1} \right) \left( \frac{v_P/v_T}{\sqrt{(v_P/v_T)^2 - 1}} \right) (1 + (v_P/v_T)) - \frac{1}{v_T} \right]$$

Pudiendo concluir que  $T'_F(v_P) < 0$ ,  $\forall v_P > v_T$ . Es decir fijado un valor de  $v_T$ ,  $T_F$  es una función decreciente respecto de  $v_P$ . Por lo tanto, cuanto mayor sea el cociente  $v_P/v_T$ , menor será el tiempo de captura.

En el caso límite en el que  $v_P \rightarrow \infty$ ,  $T_F(v_P) \rightarrow 0$ , lo que puede interpretarse como una captura instantánea de LT. Por otro lado si  $v_P \rightarrow v_T$ , entonces  $T_F(v_P) \rightarrow \infty$ . Luego no habría captura en tiempo finito.

### 1.3. Adaptación del Problema al Parque

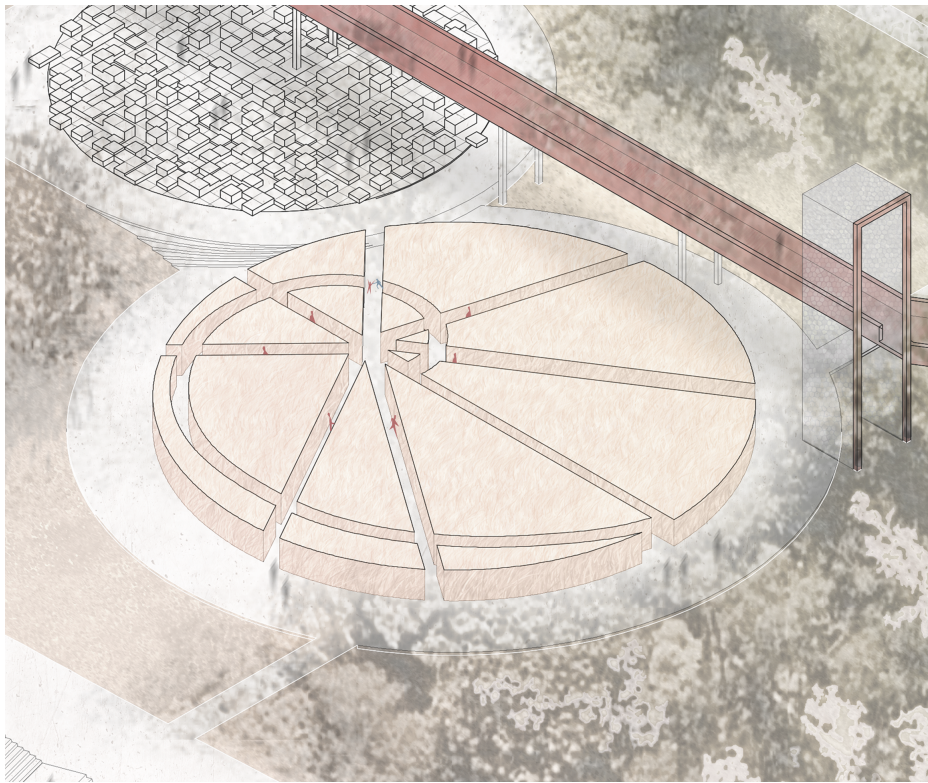
Lo que se quiere transmitir al público mediante la siguiente instalación es la idea intuitiva mencionada anteriormente: los policías deben pasar por todas las direcciones en el momento adecuado. Para ello se planteará un juego de persecución para dos personas, un perseguidor y un perseguido.

La instalación estará inmersa en un círculo, siendo el centro de dicho punto el origen de coordenadas con el que se trabajó anteriormente. Consistirá en un seto de gran altura, en el que se trazarán varios caminos rectos, y la espiral solución del problema anterior. De manera que al recorrer los caminos no se vea nada de los otros (salvo las intersecciones con la espiral cuando se llegue a ellas), dando la sensación de estar recorriendo un laberinto.

Para acceder al juego, se entrará por un camino que lleva a un punto de información. En él se encontrará un cartel con el planteamiento del problema original (sin solución), y dos carteles individuales para cada persona (perseguidor/perseguido), en el que se encontrarán las instrucciones que debe seguir cada uno en el juego. En éste, la pregunta será la posibilidad de que exista algún camino que siempre garantice captura. Este punto de información será lo equivalente al puerto en el problema.

Una vez leídas las instrucciones, el perseguido entrará al laberinto (por una pequeña puerta, para impedir la visión del perseguidor) hasta el centro del círculo. Allí escogerá uno de los posibles caminos y tocará una campana, que será la señal del comienzo de la persecución. En ese momento el perseguidor avanzará hacia el centro del círculo y tomará el camino señalado para él.

Puesto que las velocidades de ambos estarán reguladas (y bien explicado en las instrucciones) el perseguidor tiene garantizado el éxito.





## Capítulo 2

# El Problema de la Chica en el Lago

### 2.1. Planteamiento

Una estudiante de matemáticas, llamada Ana, estaba pasando unos días de vacaciones en el Lago Circular (nombre debido a la forma circular del lago), donde todas las tardes tomaba su barca y remaba hacia el centro de éste.

Su vecino, un estudiante de física llamado Carlos, estaba muy enamorado de ella, y un día decidió salir a buscarla para invitarla a salir. Sin embargo, Ana no estaba por la labor de aceptar. Así que, cuando lo vio en la orilla, para tratar de evitar la incómoda situación decidió tratar de llegar a tierra evitando encontrarse con él.

Carlos algo desconcertado ante la situación pensó que se trataba de un juego, y pensó en capturarla cuando llegase a la orilla. Además sabía que podía correr 4 veces más rápido de lo que Ana remaba. Por lo que pensó que sería fácil llegar antes que ella corriendo por el borde del lago al punto donde decidiese desembarcar.

Por otro lado, Ana sabía que podía correr más rápido que Carlos, así que hizo uso de sus conocimientos matemáticos para crear una estrategia que le permitiese llegar a la orilla sin ser interceptada por Carlos.

La pregunta es: ¿Cual fue la estrategia utilizada por Ana?

## 2.2. Resolución

### 2.2.1. Notas previas

Notación: Denotaremos por C a Carlos, y por A a Ana.

El lago tendrá un radio R. Trabajaremos con coordenadas polares, siendo el origen de nuestro sistema de referencia el centro del lago (donde se encuentra la balsa), así el vector posición de un individuo vendrá determinado por el par  $(r, \theta)$ :

$r$ : distancia al origen

$\theta$ : ángulo respecto al eje x (creciente en sentido anti horario)

Además el vector velocidad de Ana,  $\vec{v}$ , se podrá descomponer en velocidad radial,  $\vec{v}_r$ , y angular  $\vec{v}_\theta$ , tal que  $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$ . Donde:

$\vec{v}_r$ : Componente de  $\vec{v}$  paralela al vector posición.

$\vec{v}_\theta$ : Componente de  $\vec{v}$  perpendicular a  $\vec{v}_r$ , orientada en el sentido del movimiento.

Entenderemos por  $v, v_\theta$  y  $v_r$  los módulos de dichos vectores.

Nótese que no será necesaria una descomposición similar para la velocidad de Carlos, ya que su velocidad es siempre tangente al lago.

Utilizaremos también la fórmula que relaciona  $v$  con  $v_\theta = \frac{d\theta}{dt}$  en movimientos circulares a velocidad constante.

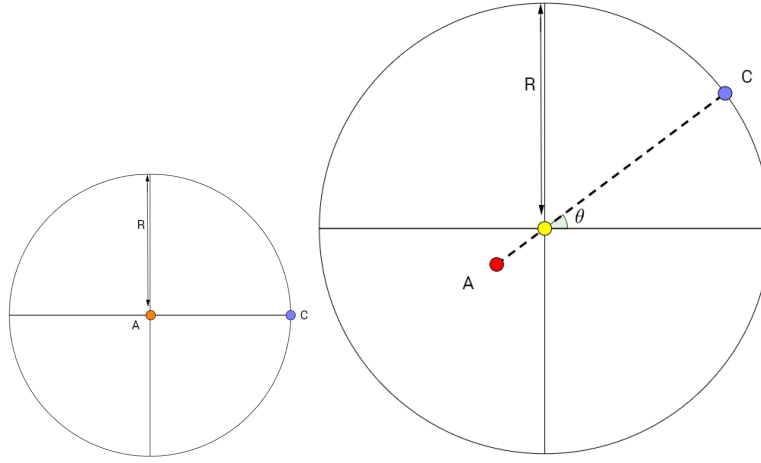
$$v = \frac{d\theta}{dt} r, \text{ siendo } r \text{ el radio del círculo del movimiento.}$$

### 2.2.2. Solución al Problema Enunciado

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que en el instante inicial,  $t = 0$ , C se encuentra en el punto  $(R, 0)$ , y A en el  $(0, 0)$ .

La estrategia de A se dividirá en dos.

En la primera avanzará alejándose de la balsa de manera que C, la balsa, y ella estén alineados. En todo momento durante esta fase, A debe barrer el mismo ángulo que C.



(a) Momento inicial      (b) Situación durante la primera estrategia

Supongamos que C corre a velocidad  $c$ , y que A rema a una velocidad  $\alpha c$  (en nuestro caso  $\alpha = 0,25$ ).

Entonces, si  $\theta(t)$  es la función que determina la posición de C,  $(R, \theta(t))$ . Puesto que C corre por el borde del lago a velocidad constante, se tiene que  $d\theta/dt = c/R$ . Por otro lado, para que A mantenga la colinealidad debe cumplirse que  $\frac{v_\theta}{r} = d\theta/dt$ . Es decir, cuanto más se aleje A del centro, mayor será su velocidad angular.

Ahora bien, A rema a velocidad  $\alpha c$ . Por lo tanto, se verifica:

$$v_r^2 + v_\theta^2 = (\alpha c)^2$$

Despejando  $v_r$  :

$$v_r = \sqrt{\alpha^2 c^2 - v_\theta^2} = \sqrt{\alpha^2 c^2 - c^2 \frac{r^2}{R^2}} = c \sqrt{\alpha^2 - \frac{r^2}{R^2}}$$

Además debe cumplirse que  $v_r > 0$ , puesto que en esta primera fase A se aleja cada vez más del centro. Pero:

$$v_r > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \frac{r^2}{R^2} > 0$$

Es decir la primera estrategia le valdrá hasta llegar a la circunferencia de radio  $r = \alpha R$ . A partir de entonces no será capaz de acercarse a la orilla a la vez que mantiene la colinealidad. Es en ese momento en el que pondrá en práctica su segunda estrategia. Pero antes de describir dicha estrategia vamos a calcular el tiempo ( $T$ ) que tarda A en alcanzar la circunferencia  $r = \alpha R$ .

Tenemos que  $v_r = \frac{dr}{dt}$ , luego  $dt = \frac{dr}{v_r}$ . Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^{\alpha R} \frac{dr}{v_r} = \int_0^{\alpha R} \frac{dr}{c\sqrt{\alpha^2 - (r/R)^2}} = \frac{R}{c} \int_0^{\alpha R} \frac{dr}{\sqrt{(\alpha R)^2 - r^2}} = \\ &= \frac{R}{c} [\arcsen(r/\alpha R)] \Big|_0^{\alpha R} = \frac{R}{c} \arcsen(1) = \frac{\pi R}{2c} \end{aligned}$$

Entonces una vez llegada al círculo de radio  $r = \alpha R$ , al que llamaremos círculo de ruptura, se plantea la siguiente pregunta: **¿Puede A olvidarse de toda matemática y simplemente remar en línea reta, minimizando la distancia a remar, dirigiéndose a la orilla?**

Lo primero es observar que le quedaría una distancia  $R - \alpha R$  por remar (a una velocidad  $\alpha c$ ). Además C se daría cuenta del nuevo movimiento y correría hacia el punto donde habría de desembarcar A, luego C recorrería una distancia  $\pi R$  (a una velocidad  $c$ ).

Por lo tanto la respuesta a la pregunta sería afirmativa sí:

$$\begin{aligned} \frac{R - \alpha R}{\alpha c} &< \frac{\pi R}{c} \\ \Leftrightarrow R(1 - \alpha) &< \pi \alpha R \\ \Leftrightarrow 1 - \alpha &< \pi \alpha \\ \Leftrightarrow 1 &< \alpha(1 + \pi) \end{aligned}$$

es decir sí:

$$\alpha > \frac{1}{1+\pi} \approx 0,24$$



Como  $\alpha = 0,25 > 0,24$  la respuesta a la pregunta es afirmativa, es decir la segunda estrategia de A sería la de dirigirse en línea recta a la orilla.

Y tardará en escapar realizando las dos estrategias un tiempo:

$$\frac{\pi R}{2c} + \frac{R(1-\alpha)}{\alpha c} = \frac{\pi R}{2c} + \frac{3R}{c} = \frac{R(\pi+6)}{2c}$$

### 2.2.3. Solución para valores "grandes" de $\alpha$

Existen valores de  $\alpha$  para los cuales A no necesita llevar a cabo las dos estrategias del problema anterior. Le basta con remar en línea recta hacia la orilla hacia el punto  $(R, \pi)$ , ya que en el momento inicial C se encuentra en el punto  $(R, 0)$ .

Estos valores de  $\alpha$  son los que verifican:

$$\frac{R}{\alpha c} < \frac{\pi R}{c}$$

Es decir:

$$\alpha > \frac{1}{\pi} \approx 0,31$$

Pero es cierto que A podría obtener una mayor ventaja si dividiese su estrategia en dos. Como ejemplo podemos ver el caso en el que  $\alpha = \frac{1}{\pi}$ , en el cual a A no le bastaría con remar en línea recta, y vamos a calcular la ventaja que obtendría siguiendo las estrategias del problema anterior.

Entonces, manteniendo la colinealidad, A llegaría al círculo de ruptura de radio  $r = \alpha R = \frac{R}{\pi}$ . Luego tendría que remar una distancia en línea recta de  $R - \frac{R}{\pi} = R(1 - \frac{1}{\pi})$ , que a velocidad  $\frac{c}{\pi}$  requeriría un tiempo de:

$$\frac{R(1 - \frac{1}{\pi})}{c/\pi} = \frac{R}{c}(\pi - 1)$$

Por otro lado cuando A llega al círculo de ruptura, C tiene que recorrer una distancia  $\pi R$  a velocidad  $c$ , que requiere un tiempo  $\frac{\pi R}{c}$ . Así la ventaja temporal de A sobre C será de:

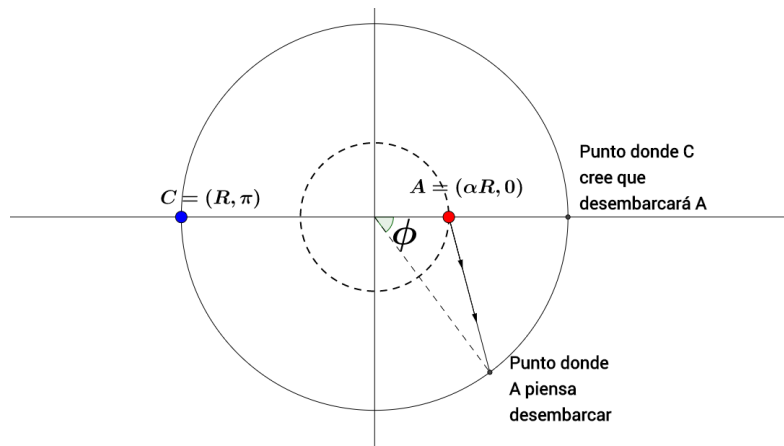
$$\frac{R}{c}\pi - \frac{R}{c}(\pi - 1) = \frac{R}{c}$$

Es decir el tiempo que tarda C en recorrer una distancia R (una ventaja bastante importante).

#### 2.2.4. Soluciones para valores "pequeños" de $\alpha$

Para llevar a cabo las dos estrategias descritas en el apartado (2.2.2) necesitábamos que  $\alpha > \frac{1}{1+\pi}$ . Pero haciendo cambios en la segunda estrategia puede trazarse un plan de escape que funciona para valores más pequeños de  $\alpha$ .

Supongamos que C, que al ser físico posee algunos conocimientos matemáticos, se da cuenta del plan original de A. Entonces dejaría que A llegase al círculo de ruptura, de radio  $\alpha R$ , y en ese momento comenzaría a correr a toda velocidad hacia el punto donde habría de desembarcar A si decidiese avanzar en línea recta (lo que asumiremos que sería para C la estrategia lógica de A, pues minimiza su distancia a remar). Sin embargo, como buena matemática, asumiremos que A se da cuenta de lo que intenta hacer C. Entonces lo que tendrá que hacer es avanzar en línea recta hacia la orilla, pero no en la dirección que minimiza la distancia. Si C comienza su recorrido en sentido horario, A tomará una dirección con un ángulo  $\phi$  como se ve en la figura:



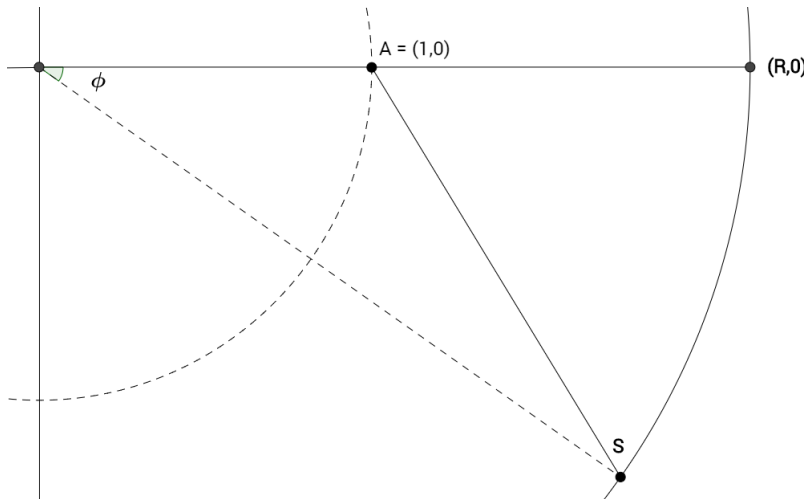
Denotaremos por S al punto en el que A quiere desembarcar con un ángulo  $\phi$  (C piensa que  $\phi = 0$ ). **Queremos conocer cual es el menor  $\alpha$  que permite el escape de A con esta nueva estrategia en función de  $\phi$ .**

Sin pérdida de generalidad, para simplificar los cálculos, tomaremos como unidad de longitud la distancia del círculo de ruptura al origen. Es decir  $\alpha R = 1$ , o bien:

$$\alpha = \frac{1}{R}$$

Por lo tanto buscar el mínimo valor de  $\alpha$  que permita el escape es equivalente a buscar el valor máximo de  $R$ . Además la velocidad a la que rema A es  $\alpha c = (1/R)c = c/R$ . Así podemos desarrollar el problema como sigue:

A se encuentra en el comienzo de esta nueva estrategia en el punto  $A = (1, 0)$



Por el teorema del coseno se tiene que la longitud del segmento que debe recorrer,  $AS$ , es de:

$$AS = \sqrt{1 + R^2 - 2R\cos(\phi)}$$

Lo que le tomaría un tiempo de:

$$\frac{AS}{c/R} = \frac{\sqrt{1 + R^2 - 2R\cos(\phi)}}{c/R} = \frac{R}{c} \sqrt{1 + R^2 - 2R\cos(\phi)} \quad (2.1)$$

Nótese que C comenzó su movimiento en sentido horario y que ahora, pese a la nueva actuación de A, no tendría sentido un cambio de dirección ya que eso solo provocaría que en algún momento volvieran a estar alineados A C y el centro del lago (estando A más cerca de la orilla de lo que estaba en el inicio de la segunda estrategia). Y en ese momento A volvería a repetir la nueva estrategia hasta que en algún momento acabaría llegando a la orilla.

Por lo tanto, lo óptimo para C sería seguir corriendo en sentido horario, teniendo que recorrer una distancia  $(\pi + \phi)R$  para alcanzar el punto S. Lo que le llevaría un tiempo de:

$$\frac{R}{c}(\pi + \phi) \quad (2.2)$$

Evidentemente si el tiempo que tarda A en llegar a S es menor que el que tarda C, A escaparía. Vamos a calcular entonces cual es el menor valor de  $\alpha$  que hace que lleguen a la vez,  $\alpha_{min}$ , de manera que los valores que permiten un escape serán aquellos superiores a  $\alpha_{min}$ .

De (2.1) y (2.2) tenemos que llegarán a la vez cuando:

$$\pi + \phi = \sqrt{1 + R^2 - 2R\cos(\phi)}$$

y despejando  $R$ :

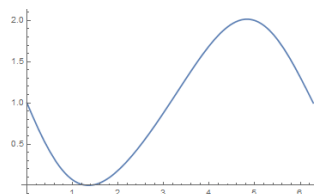
$$R = \cos(\phi) + \sqrt{\cos^2(\phi) + (\pi + \phi)^2 - 1}$$

(Tomamos la raíz positiva ya que R no toma valores negativos)

Por la relación  $\alpha = \frac{1}{R}$ , lo que queremos es maximizar R como función de  $\phi$ ,  $R(\phi)$ .

Si calculamos la derivada de  $R(\phi)$ , y dibujamos su gráfica en el intervalo  $(0, 2\pi)$  :

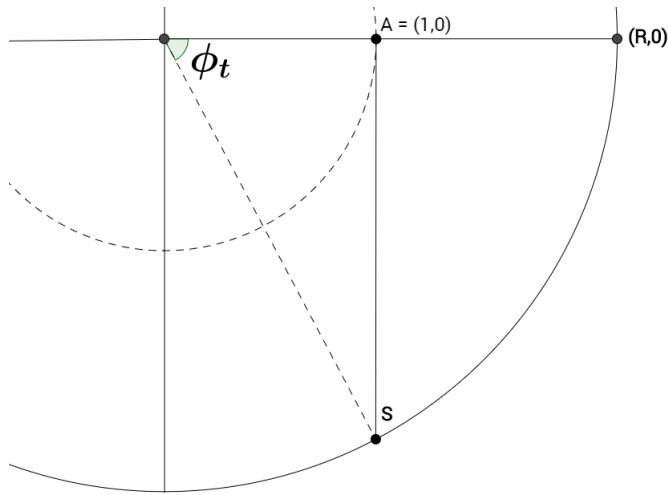
$$R'(\phi) = \frac{2(x + \pi) - \sin(2x)}{2\sqrt{(x + \pi)^2 + \cos(x)^2 - 1}} - \sin(x)$$



Observamos que en todo el intervalo  $R'(\phi) \geq 0$ , por lo tanto  $R(\phi)$  es una función no decreciente en dicho intervalo.

Pero hay que tener en cuenta que el segmento AS no debe cortar al círculo de ruptura, ya que eso alejaría a A de la orilla en lugar de acercarla, y para intentar escapar tendría que volver de nuevo al centro del lago y comenzar de nuevo.

Es decir el  $\phi$  que buscamos,  $\phi_t$ , es el mayor del intervalo  $(0, 2\pi)$  que haga que AS no corte al círculo de ruptura. Esto ocurrirá cuando AS sea tangente a dicho círculo.



Entonces se tiene que:

$$\cos(\phi_t) = \frac{1}{R}$$

Y sustituyendo en la expresión anterior de R tenemos:

$$\frac{1}{\cos(\phi_t)} = \cos(\phi_t) + \sqrt{\cos(\phi_t)^2 + (\pi + \phi_t)^2 - 1}$$

Para averiguar el valor de  $\phi_t$ , despejamos en la expresión anterior  $(\pi + \phi_t)$ , y obtenemos la siguiente igualdad:

$$\tan(\phi_t) = \pi + \phi_t$$

Y resolviendo numéricamente se tiene que  $\phi_t \approx 1,35$

Por lo tanto tenemos:

$$\alpha_{min} = \frac{1}{R_{max}} = \cos(\phi_t) \approx 0,21$$

Es decir, A podrá escapar siempre que  $\alpha > \cos(\phi_t) \approx 0,21$ .

O lo que es lo mismo, A puede escapar aunque C corra  $1/\alpha_{min} = 4,6$  veces más rápido de lo que ella rema.

## 2.3. Adaptación del Problema al Parque

La idea de este problema es tratar de transmitir la utilidad y los defectos que puede tener la estrategia de coolinealidad como forma de escape.

El problema se adaptará al parque al pie de la letra. Es decir habrá un lago circular (con dos círculos de ruptura trazados en el suelo del lago) y dos personas, un perseguidor y un perseguido.

Una vez leídas las instrucciones del problema, el perseguido se montará en la barca (de motor eléctrico) que habrá en el lago, y avanzará hacia el centro del lago.

El perseguidor debe montarse en un asiento con pedales encima de un raíl que recorre el borde del río. El sistema de pedaleo sigue un mecanismo similar al de una puerta giratoria (no automática), de manera que la velocidad a la que avanza es constante, y se puede parar o cambiar de sentido de manera prácticamente instantánea con facilidad.

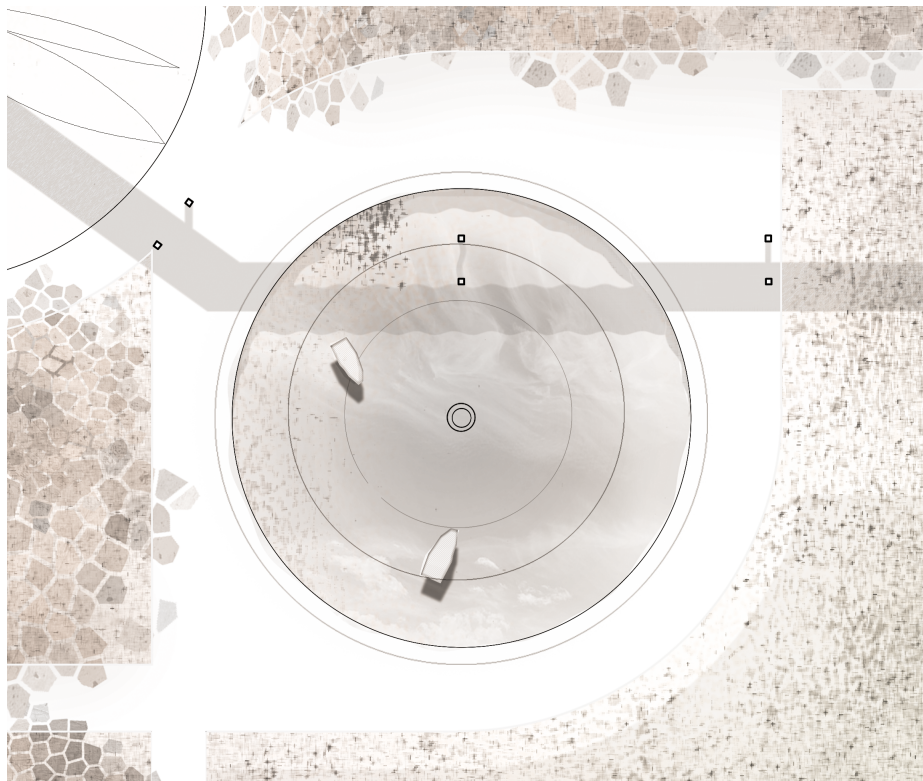
La barca dispondrá de tres velocidades, que harán que el escape sea más o menos fácil:

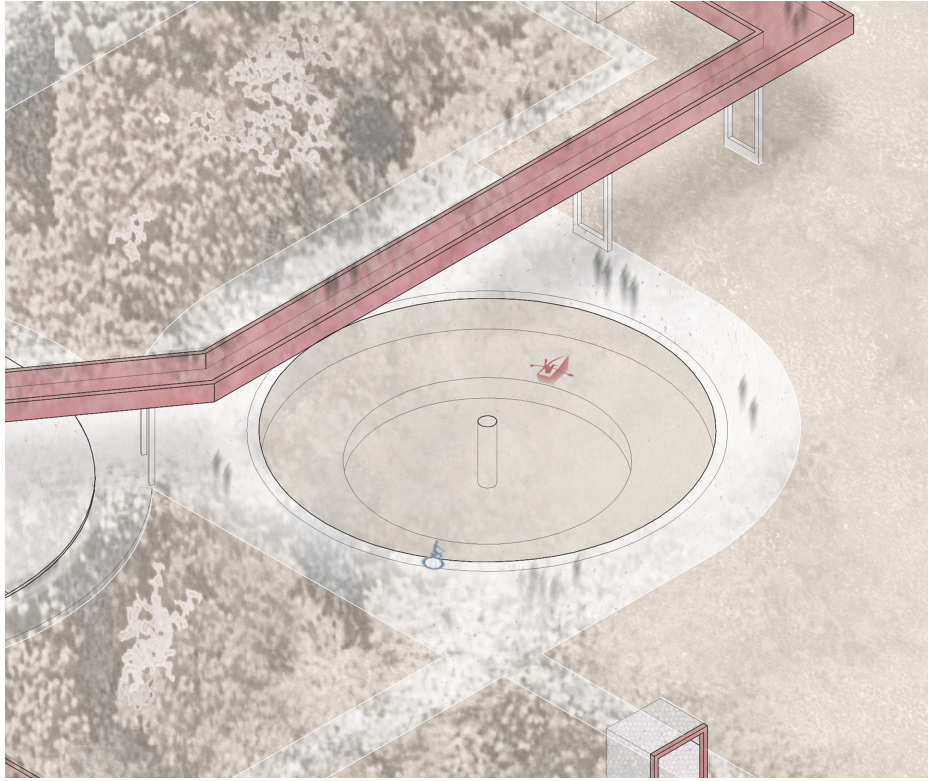
**Modo fácil:**  $\alpha = 0,33$ , al perseguido le basta con dirigirse en línea recta hacia la orilla.

**Modo intermedio:**  $\alpha = 0,27$ , el perseguido tendrá que utilizar la estrategia de coolinealidad hasta llegar al segundo círculo de ruptura, y allí dirigirse en línea recta hacia la orilla.

**Modo difícil:**  $\alpha = 0,22$ , a la estrategia de coolinealidad habrá que añadir la segunda estrategia descrita en (2.2.4) una vez llegado al primer círculo de ruptura.

**Modo imposible:**  $\alpha = 0,15$ , en este caso da igual lo que haga el perseguido que no podrá evitar su captura.







## Capítulo 3

# El Problema del Camino Seguro

### 3.1. Planteamiento

Un conejo se mueve por una pradera intentando no ser detectado por un zorro. El zorro se encuentra inicialmente en el punto  $(0, -b)$ , y se mueve hacia la izquierda a velocidad constante  $v_z$ . El conejo se encuentra inicialmente en el punto  $(0, a)$ . En la pradera lo único que puede encontrarse (además del zorro y del conejo) es un gran árbol que se encuentra en el centro,  $(0, 0)$ . De manera que en el momento inicial el zorro, el conejo y el árbol están alineados. El zorro es capaz de ver cualquier movimiento en la pradera, salvo los que ocurren detrás del árbol. Por lo tanto el conejo estará a salvo siempre que se mantenga alineado con el árbol y el zorro. Si el conejo se mueve a velocidad constante  $v_c$ . ¿Qué camino debe seguir para estar a salvo?

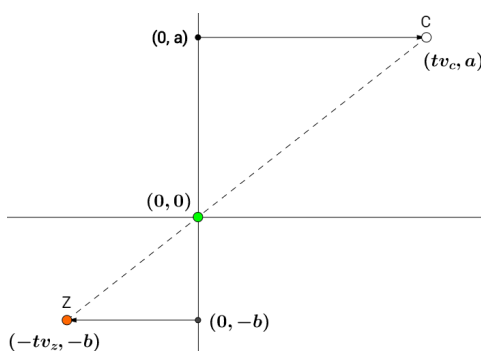
Nota:  $a, b > 0$

Notación: Denotaremos por Z al zorro, y por C al conejo.

## 3.2. Resolución

### Una primera consideración

Consideremos el caso en el que C se mueve de forma segura en línea recta hacia la derecha. Entonces si denotamos por  $t$  al tiempo, la geometría del problema sería la que sigue en la imagen:

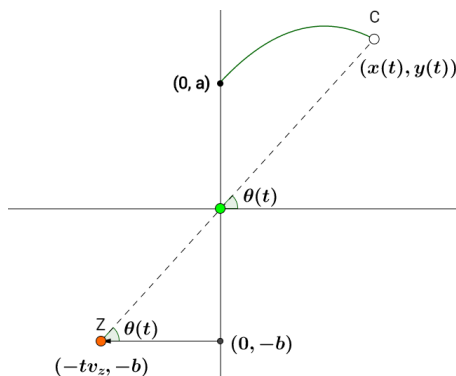


Puesto que los triángulos son semejantes se verifica que:

$$\frac{tv_c}{a} = \frac{-tv_z}{-b} \Rightarrow v_c = \frac{av_z}{b}$$

### Búsqueda de una solución general

Hemos visto que el camino seguro de C es seguir en línea recta hacia la derecha si su velocidad es  $v_c = \frac{av_z}{b}$ . Lo que buscamos ahora es la curva,  $(x(t), y(t))$ , que debe seguir para cualquier valor de  $v_c$ .



El diferencial de longitud de la curva verifica que  $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ , y en consecuencia:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Teniendo en cuenta que  $v_c = \frac{dl}{dt}$ , se tiene que:

$$v_c^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Como puede verse en la imagen anterior, podemos expresar la tangente del ángulo  $\theta(t)$  como:

$$\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b}{tv_z}$$

Entonces podemos despejar  $x(t) = \frac{tv_z}{b}y(t)$ , y derivando esta expresión:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_z}{b} \left[ t \frac{dy}{dt} + y \right]$$

Si sustituimos ahora en la expresión de  $v_c^2$  obtenemos:

$$v_c^2 = \left(\frac{v_z}{b}\right)^2 \left[ t \frac{dy}{dt} + y \right]^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Que tras un poco de álgebra puede expresarse como:

$$v_c^2 = \left[ 1 + \left(\frac{tv_z}{b}\right)^2 \right] \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2 \left(\frac{v_z}{b}\right)^2 ty \frac{dy}{dt} + \left(\frac{v_z}{b}\right)^2 y^2 \quad (3.1)$$

Para simplificar la notación, vamos a definir las siguientes variables (adimensionales):

$$X = \frac{v_z}{bv_c}x, \quad Y = \frac{v_z}{bv_c}y, \quad T = \frac{v_z}{b}t$$

Con estos cambios, podemos escribir  $\frac{dy}{dt}$  como sigue:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{bv_c Y}{v_z} \right) = \frac{d}{dT} \left( \frac{bv_c Y}{v_z} \right) \frac{dT}{dt} = \frac{bv_c}{v_z} \frac{dY}{dT} \frac{v_z}{b} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v_c \frac{dY}{dT}$$

Sustituyendo esta expresión de  $\frac{dy}{dt}$ , y las nuevas variables en (3.1) se tiene:

$$v_c^2 = (1 + T^2) v_c^2 \left( \frac{dY}{dT} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_z}{bv_c} y v_c \right) \left( \frac{tv_z}{b} \right) \left( v_c \frac{dY}{dT} \right) + \frac{v_z^2 b^2 v_c^2}{b^2 v_z^2} Y^2$$

y simplificando:

$$(1 + T^2) \left( \frac{dY}{dT} \right)^2 + 2YT \frac{dY}{dT} + Y^2 - 1 = 0$$

Que como puede observarse es una ecuación de segundo grado respecto de  $\frac{dY}{dT}$ , y por lo tanto tenemos:

$$\boxed{\frac{dY}{dT} = \frac{-YT \pm \sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2}} \quad (3.2)$$

Por otro lado, para X puede encontrarse otra ecuación diferencial similar. Recordando que  $x = \frac{tv_z}{b} y$ , tenemos:

$$X = \frac{v_z}{bv_c} x = \frac{v_z}{bv_c} \frac{tv_z}{b} y = YT$$

Derivando ahora X respecto de T,  $\frac{dX}{dT} = Y + T \frac{dY}{dT}$ , y sustituyendo el valor de (3.2) tenemos que:

$$\boxed{\frac{dX}{dT} = \frac{Y \pm T \sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2}} \quad (3.3)$$

Ante la imposibilidad de resolver la ecuación diferencial (3.2) para posteriormente obtener la expresión de  $(x(t), y(t))$ , representaremos diferentes curvas (aproximadas numéricamente) que debe seguir C para ciertos valores de  $v_c$ .

Pero antes vamos a ver la información puede obtenerse sobre el camino seguro de C sin resolver el sistema.

## Información sobre el camino

- En primer lugar podemos ver que  $Y(0) > 0$ , ya que:

$$Y(0) = \frac{v_z}{bv_r}y(0) = \frac{v_z}{bv_r}a > 0, \quad v_z, v_c, a, b > 0$$

Ahora bien, en ambas ecuaciones (3.2) (3.3) se ve involucrado el radical  $\sqrt{1 + T^2 - Y^2}$ . Por lo tanto en el tiempo  $t = 0$  ( $T = 0$ ), debe verificarse que  $Y(0) \leq 1$ , ya que dicho radical debe ser real (por el sentido físico que representan  $dX$  y  $dY$ ).

Por lo tanto tenemos que  $0 < Y(0) \leq 1$ . De donde se obtiene la siguiente condición sobre  $v_c$  :

$$Y(0) = \frac{v_z}{bv_c}a \leq 1 \quad \Rightarrow \quad v_c \geq \frac{v_z}{b}a$$

Es decir si la velocidad de C es inferior a  $\frac{v_z}{b}a$ , entonces no existe un camino que lo mantenga a salvo de Z.

• Otro detalle interesante es ver como se ve afectado el camino de C en función del signo del radical  $\sqrt{1 + T^2 - Y^2}$ .

Si escogemos el signo positivo y calculamos las soluciones constantes de (3.2) obtenemos únicamente  $Y = 1$  ( $X = T$ ), y como puede comprobarse verifican  $\frac{dY}{dT} = 0$ ,  $\frac{dX}{dT} = 1$ :

$$\frac{dY}{dT} = \frac{-YT + \sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2} = \frac{-T + \sqrt{1 + T^2 - 1}}{1 + T^2} = \frac{-T + T}{1 + T^2} = 0$$

$$\frac{dX}{dT} = \frac{Y + T\sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2} = \frac{1 + T\sqrt{1 + T^2 - 1}}{1 + T^2} = \frac{1 + T^2}{1 + T^2} = 1$$

La interpretación física de esta solución es simple.

$Y = 1 \Rightarrow \frac{v_z}{bv_c}y = 1$ , lo que implica que  $y$  es constante.

$X = T \Rightarrow \frac{v_z}{bv_c}x = \frac{tv_z}{b}$ , que implica que  $x = tv_c$ .

De manera que  $(x(t), y(t))$  es un movimiento rectilíneo con velocidad constante, en la recta  $y = a$ , que fue la primera solución descrita del problema.

Lo verdaderamente importante no es la solución  $Y = 1$  en sí, sino la cota que se obtiene para toda  $Y(T)$  que no sea la solución constante:

$$Y(T) < 1, \quad \forall T > 0 \quad (3.4)$$

Esto es consecuencia directa del teorema de Picard de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales. La solución  $Y = 1$  divide el plano en dos, ya que ninguna otra puede atravesarla (si la cortase en algún punto, por el teorema, tendrían que ser la misma). Por lo tanto cualquier otra solución se encuentra en el semiplano  $Y > 1$  o en el semiplano  $Y < 1$ .

Ahora bien  $Y(0) \leq 1$ , por lo tanto se tiene (3.4).

Luego  $Y^2(T) - 1 < 0$ , de manera que:

$$\sqrt{1 + T^2 - Y^2} = \sqrt{Y^2 T^2 - (1 + T^2)(Y^2 - 1)} > YT$$

Entonces, escogiendo el signo  $+$  en el radical  $\sqrt{1 + T^2 - Y^2}$ , podemos afirmar que:

$$\frac{dY}{dT} = \frac{-YT + \sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2} > 0$$

Aplicando el mismo argumento es fácil ver que  $\frac{dX}{dT} > 0$  pues:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{Y + T\sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2} = \frac{Y + T\sqrt{T^2 - (Y^2 - 1)}}{1 + T^2} > 0$$

Por lo tanto  $X, Y$  son funciones creciente, además  $Y$  está acotada superiormente por la función  $Y = 1$ .

- Si escogemos ahora el signo  $-$  del radical  $\sqrt{1 + T^2 - Y^2}$  :

$$\frac{dY}{dT} = \frac{-YT - \sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2} = \frac{-YT - \sqrt{Y^2 T^2 - (1 + T^2)(Y^2 - 1)}}{1 + T^2} < 0$$

Siendo entonces  $Y$  una función decreciente.

Por otro lado el comportamiento de  $X$  vendrá determinado por el valor de  $Y$ .

$$\frac{dX}{dT} = \frac{Y - T\sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2}$$

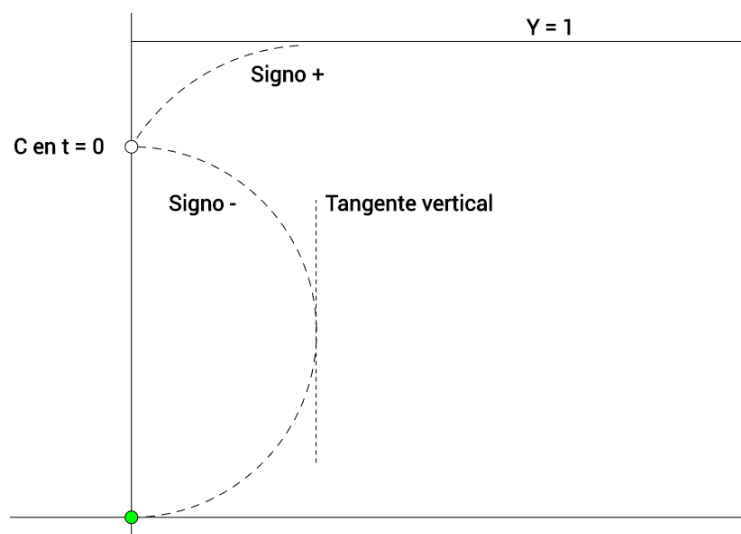
$$Y > T \Rightarrow \frac{dX}{dT} > 0$$

$$Y < T \Rightarrow \frac{dX}{dT} < 0$$

$$Y = T \Rightarrow \frac{dX}{dT} = 0$$

En el caso en el que  $\frac{dX}{dT} = 0$  se tiene que  $\frac{dY}{dX} = \frac{dY/dT}{dX/dT} = \frac{\neq 0}{= 0} = \infty$ , es decir en el punto  $Y = T$  la curva tiene una recta tangente vertical.

En la siguiente imagen puede observarse el comportamiento del camino que debe seguir  $C$  según el signo del radical  $\sqrt{1 + T^2 - Y^2}$ .



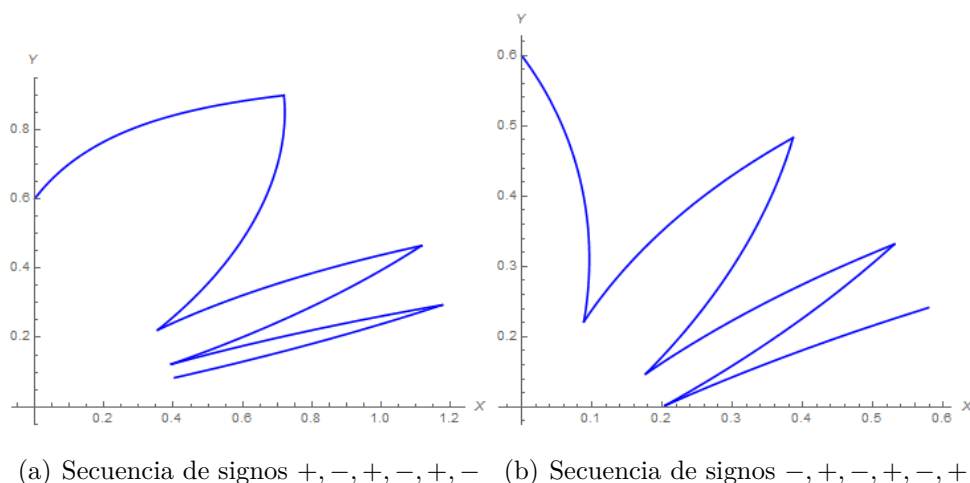
- Nótese que si se escoge el signo  $-$ , en algún momento  $C$  llegará al punto  $(0,0)$ , ya que  $Y$  es una función decreciente y  $X = YT$ . Entonces si  $C$  es inteligente no seguirá avanzando dejando el árbol a sus espaldas, ya que entraría en el campo visual de  $Z$  (pues  $dY, dX < 0$ ).

Sin embargo podría cambiar su camino (cambiando el signo del radical).

De hecho,  $C$  podría alternar a placer entre los dos caminos que define el radical.

Finalmente en la siguiente figura se ven representado dos caminos seguros de  $C$ , obtenidos mediante aproximación numérica. En ambos caminos  $C$  va alternando el signo del radical.

En la figura (a)  $T \in [0, 5]$ , en la (b)  $T \in [0, 5/2]$



### 3.3. Adaptación del Problema al Parque

Con este problema se quiere transmitir una idea que para la gente no familiarizada con las matemáticas puede parecer poco intuitiva.

El siguiente cuestionario fue realizado por 20 personas, para obtener una idea de lo que podían pensar sobre la solución del problema.

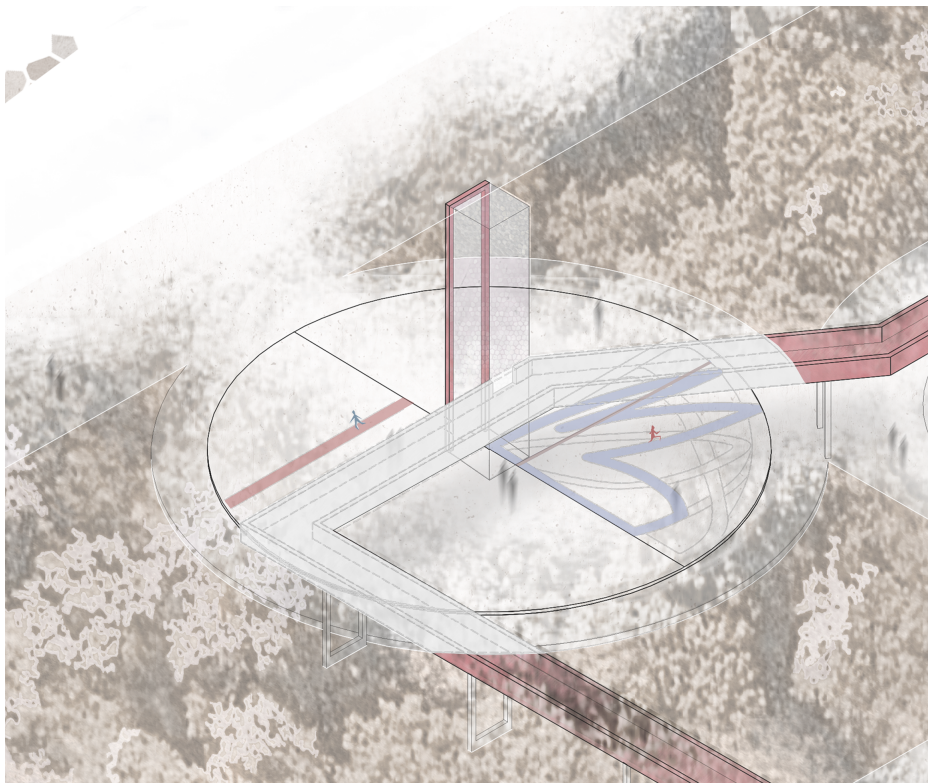
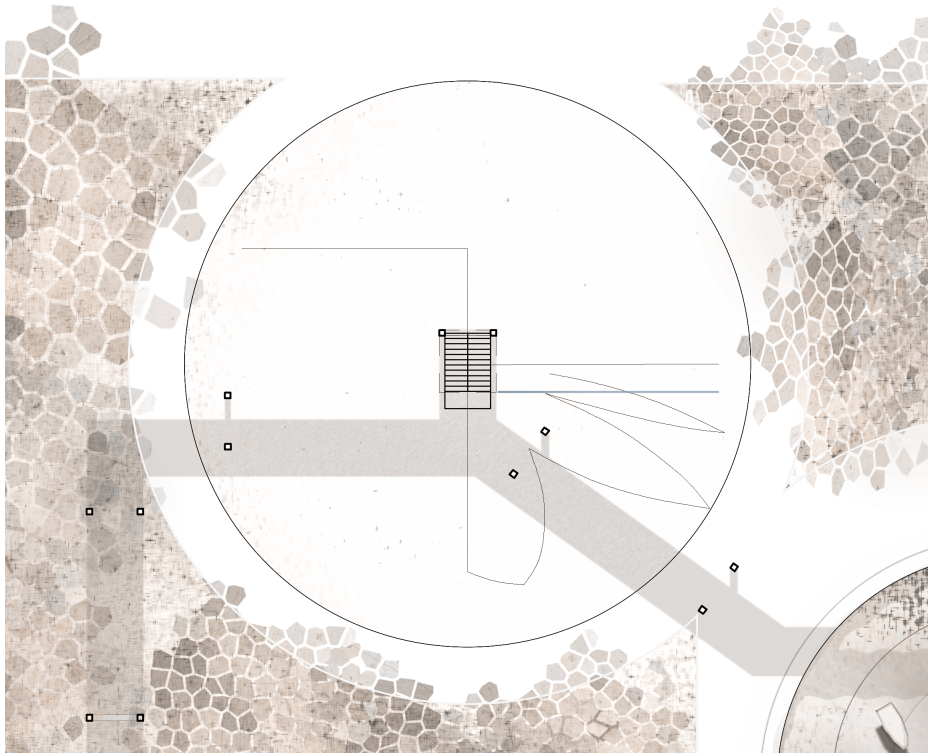


Tras una explicación del problema (con mucha libertad en las hipótesis), podían responder SI o NO a las siguientes preguntas:

- 1.¿Podría C quedarse quieto?
- 2.¿Podría ser el camino una línea recta?
- 3.¿Podría ser un camino no recto?
- 4.¿Podría ser un camino que a veces se acercase, y a veces se alejase del árbol?

El resultado de la encuesta fue muy interesante, tan solo un 15 % respondió SI a la cuarta pregunta. Mientras que a las preguntas 1,2 y 3 prácticamente el 100 % respondió 1.NO, 2.SI, 3.SI .

En el jardín se plantea un juego de persecución "visual" en una extensión de terreno plana que hace de pradera, haciendo una de las que conecta la pasarela de árbol. Dos personas se reparten los papeles de zorro y conejo. El que hace de zorro tan solo tiene que seguir el camino recto marcado, mientras que el que hace de conejo tiene muchas posibilidades pues sigue un camino que se va ramificando en más caminos. Así el objetivo del juego es que quien hace de conejo intente deducir cual es el camino correcto, o que pruebe (por ensayo error) todos los caminos posibles hasta que encuentre la forma de cruzar la línea horizontal que se ve en la imagen sin ser visto por el otro jugador (que será posible por la gran dimensión de la torre que hace de árbol).



## Capítulo 4

# El Problema de la Persecución Triangular

### 4.1. Planteamiento

Tres amigos que pasean por un parque deciden poner en práctica el siguiente experimento: Para comenzar se sitúan formando un triángulo imaginario (es decir, no están alineados), siendo el objetivo de estos perseguirse entre sí, teniendo en cuenta que cada uno debe ser perseguido por otro. Los tres caminan a la misma velocidad y avanzan apuntando siempre hacia el punto donde se encuentra su objetivo.

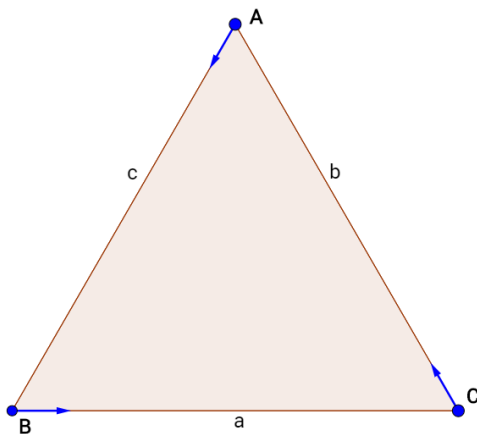
Lo que pretenden es ver, en el caso de que se de una captura, si ésta ocurre de forma simultánea entre los tres. Además de si este hecho depende o no de la forma del triángulo imaginario que forman inicialmente.

El objetivo de este capítulo es probar que supuesta la captura de dos amigos, la captura es simultánea entre los tres independientemente de la forma del triángulo inicial.

## 4.2. Resolución

### Consideraciones previas

Denotaremos por A, B y C a los tres individuos, es decir A, B y C serán los vértices del triángulo que forman los amigos en cada instante de tiempo. Nuestro objetivo es ver que cada individuo capturará a su objetivo en el mismo instante de tiempo  $t_c$ . En la siguiente imagen se muestra la situación inicial del problema en un triángulo equilátero (aunque veremos que para los cálculos que van a realizarse la forma del triángulo es irrelevante).



(Nota: haremos un pequeño abuso de notación pues denotaremos también por A, B y C a los ángulos de cada vértice del triángulo A, B y C.)

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los tres se mueven a velocidad constante 1. Por lo tanto la componente del vector velocidad de C sobre  $a$  es  $-\cos(C)$ . Al igual que la de B sobre  $c$ , y la A sobre  $b$  son respectivamente  $-\cos(B)$  y  $-\cos(A)$ .

Es claro entonces que las variaciones respecto al tiempo de los segmentos  $a, b$  y  $c$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -1 - \cos(C) = -[1 + \cos(C)] \\ \frac{db}{dt} &= -1 - \cos(A) = -[1 + \cos(A)] \\ \frac{dc}{dt} &= -1 - \cos(B) = -[1 + \cos(B)]\end{aligned}$$

Nótese que  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{db}{dt}$  y  $\frac{dc}{dt}$  no son nunca positivos ya que el coseno toma valores entre  $-1$  y  $1$ . Esto quiere decir que el tamaño de los segmentos no puede aumentar (un resultado que físicamente parece bastante obvio, pero que es muy importante para la resolución).

Por otro lado, por el teorema del coseno tenemos que  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$ . Dividiendo la expresión por 2 y derivando respecto a  $t$  obtenemos

$$a \frac{da}{dt} = b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} - \left( b \frac{dc}{dt} + c \frac{db}{dt} \right) \cos(A) + bc \operatorname{sen}(A) \frac{dA}{dt},$$

y sustituyendo los valores de  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{db}{dt}$ ,  $\frac{dc}{dt}$  por las expresiones anteriores, tras unas operaciones elementales tenemos que

$$\begin{aligned} bc \operatorname{sen}(A) \frac{dA}{dt} &= -a [1 + \cos(C)] + b [1 + \cos(A)] + c [1 + \cos(B)] \\ &= -b [1 + \cos(B)] \cos(A) - c [1 + \cos(A)] \cos(A) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si hacemos uso ahora de la siguiente igualdad trigonométrica válida para cualquier triángulo:

$$b [\operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B) - \cos(A) \cos(B) + 1] - c [\cos(A) - \cos(B)] = a [1 + \cos(C)],$$

y sustituimos el valor de  $a [1 + \cos(C)]$  en (4.1), obtenemos tras varias cancelaciones de términos la igualdad:

$$bc \operatorname{sen}(A) \frac{dA}{dt} = -b \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B) + c \operatorname{sen}^2(A),$$

de donde podemos despejar  $\frac{dA}{dt}$  como sigue

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\operatorname{sen}(A)}{b} - \frac{\operatorname{sen}(B)}{c} \quad (4.2)$$

Para  $\frac{dC}{dt}$  y  $\frac{dB}{dt}$  obtenemos fórmulas análogas

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\text{sen}(C)}{a} - \frac{\text{sen}(A)}{b}, \quad \frac{dB}{dt} = \frac{\text{sen}(B)}{c} - \frac{\text{sen}(C)}{a} \quad (4.3)$$

### Prueba de Captura Simultánea

La prueba la haremos por reducción al absurdo. Supondremos que se da una captura no simultánea en un instante de tiempo  $t_0$ , y llegaremos a que  $A + B + C < \pi$ , contradicción puesto que  $A + B + C = \pi$  para todo instante de tiempo  $t < t_0$ .

Nótese además que todos los ángulos deben ser menores que  $\pi$ , ya que si por ejemplo  $A = \pi \Rightarrow B = C = 0$  que implicaría que los tres puntos están alineados, situación imposible dado el planteamiento del problema.

Comenzamos suponiendo una captura no simultánea en  $t_0$ . Vimos anteriormente que  $a, b$ , y  $c$  son funciones monótonas no crecientes, y además están acotadas inferiormente por 0. Por lo tanto existen sus límites cuando  $t \rightarrow \infty$ , y podemos suponer

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} a = a_0 > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} b = b_0 > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} c = 0$$

que equivale a decir que cuando  $t \rightarrow t_0^-$   $A$  captura a  $B$ , mientras que  $B$  no captura a  $C$ , y  $C$  no captura a  $A$  (es decir captura no simultánea).

Entonces si tomamos valores de  $t$  suficientemente cercanos a  $t_0^-$  tendremos

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{c} < 0,$$

sustituyendo  $a/b = \text{sen}(A)/\text{sen}(B)$  (teorema del seno) y despejando obtenemos

$$\frac{\text{sen}(A)}{b} < \frac{\text{sen}(B)}{c}$$

De la desigualdad anterior y de (4.2) deducimos que el ángulo  $A$  es monótona decreciente como función  $t$ . Además  $A$  está acotado inferiormente por 0, por lo tanto existe

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} A = A_0 < \pi$$

Por otro lado, para el ángulo  $B$ , puesto que  $a > a_0$  para  $0 < t < t_0^-$ , de (4.3) deducimos

$$\frac{dB}{dt} > \frac{\text{sen}(B)}{c} - \frac{\text{sen}(C)}{a_0},$$

y podemos acentuar más la desigualdad sustituyendo  $\text{sen}(C)$  por 1, y  $\text{sen}(B)/c$  por 0 (puesto que en el intervalo  $(0, \pi)$ ,  $\text{sen}(B)/c > 0$ ), obteniendo

$$\frac{dB}{dt} > -\frac{1}{a_0},$$

o bien

$$\frac{dB}{dt} + \frac{1}{a_0} > 0,$$

que implica que

$$\frac{d}{dt} \left( B + \frac{t}{a_0} \right) > 0$$

Tenemos entonces que  $B + t/a_0$  es una función monótona creciente, y además está acotada superiormente por  $\pi + t_0/a_0$ , por lo tanto existe el límite cuando  $t \rightarrow t_0^-$ , que llamaremos  $B_0$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} B = B_0$$

Integrando ahora  $dB/dt$  en  $0 \leq t \leq t_0^-$  obtenemos

$$\int_0^{t_0^-} \frac{dB}{dt} dt = \int_0^{t_0^-} dB > \int_0^{t_0^-} \frac{\text{sen}(B)}{c} dt - \int_0^{t_0^-} \frac{1}{a_0} dt,$$

o bien

$$B(t_0^-) - B(0) > \int_0^{t_0^-} \frac{\text{sen}(B)}{c} dt - \int_0^{t_0^-} \frac{1}{a_0} dt,$$

y por último sustituyendo ahora  $B(t_{0-})$  por  $B_0$

$$B_0 - B(0) + \frac{t_{0-}}{a_0} > \int_0^{t_{0-}} \frac{\text{sen}(B)}{c} dt$$

Cabe mencionar que la integral de esta desigualdad existe ya que toma un valor positivo (el integrando es positivo en todo el intervalo) y está acotada superiormente.

Vamos a probar ahora que  $\lim_{t \rightarrow t_{0-}} B = B_0 = 0$ . Comenzamos expresando el valor de la integral de la desigualdad anterior en términos de  $c$ , para ello recordamos que  $dc/dt = -(1 + \cos(B))$ , entonces haciendo el cambio de variable  $t = c$  obtenemos

$$- \int_{c(0)}^{c_0} \frac{\text{sen}(B)}{1 + \cos(B)} \cdot \frac{dc}{c},$$

que bajo nuestra suposición de que  $c_0 = 0$  ( $A$  captura a  $B$  en  $t_0$ ) puede expresarse como

$$\int_0^{c(0)} \frac{\text{sen}(B)}{1 + \cos(B)} \cdot \frac{dc}{c},$$

que mediante una última transformación trigonométrica  $\text{sen}(\theta)/(1+\cos(\theta)) = \tan(\theta/2)$  resulta:

$$\int_0^{c(0)} \frac{\tan(B/2)}{c} dc$$

Además hemos probado que la integral existe, hay que notar entonces que cuando  $c \rightarrow 0$  debe cumplirse que  $\tan(B/2) \rightarrow 0$  para evitar la divergencia, pero también tenemos que  $B_0 = \lim_{t \rightarrow t_{0-}} B = \lim_{c \rightarrow 0} B$ , y esto implica que  $\tan(B_0/2) = \lim_{c \rightarrow 0} \tan(B/2) = 0$ , y esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow t_{0-}} B = B_0 = 0$$

Por último, bajo nuestra suposición,  $c$  se convertirá en algún momento en el lado más pequeño del triángulo, y por el teorema del seno,  $C$  se convertirá también en el ángulo más pequeño. Pero hemos visto que  $B \rightarrow 0$  cuando  $c \rightarrow 0$  y por lo tanto se tiene

$$\lim_{t \rightarrow t_{0-}} C = C_0 = 0$$



Con los resultados anteriores de  $A, B$ , y  $C$  llegamos finalmente a contradicción

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} (A + B + C) = A_0 < \pi,$$

y así concluimos que la captura es simultánea.

### Tiempo de Captura

Nos planteamos ahora calcular una cota inferior y una cota superior del tiempo de captura  $t_c$ .

Recordemos que

$$\frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} + \frac{dc}{dt} = -(3 + \cos(A) + \cos(B) + \cos(C)),$$

teniendo en cuenta que  $A + B + C = \pi$ , y que todos los ángulos se encuentran en el intervalo  $[0, \pi]$  podemos escribir

$$1 \leq \cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq \frac{3}{2}$$

De estos dos resultados podemos obtener la siguiente desigualdad

$$-\frac{9}{2} \leq \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} + \frac{dc}{dt} \leq -4,$$

e integrando respecto de  $t$

$$-\frac{9}{2}t \leq a(t) + b(t) + c(t) + k \leq -4t,$$

siendo  $k$  la constante de integración. Fijando  $t = 0$

$$0 \leq a(0) + b(0) + c(0) + k \leq 0,$$

que implica  $a(0) + b(0) + c(0) + k = 0$ , de donde  $k = -a(0) - b(0) - c(0)$

por lo tanto tenemos

$$-\frac{9}{2}t \leq a(t) + b(t) + c(t) - a(0) - b(0) - c(0) \leq -4t$$

En el momento de la captura,  $t = t_c$ , se tiene que  $a(t_c) = b(t_c) = c(t_c) = 0$ , luego

$$\frac{9}{2}t_c \geq a(0) + b(0) + c(0) \geq 4t_c,$$

y despejando  $t_c$  obtenemos finalmente nuestra cota

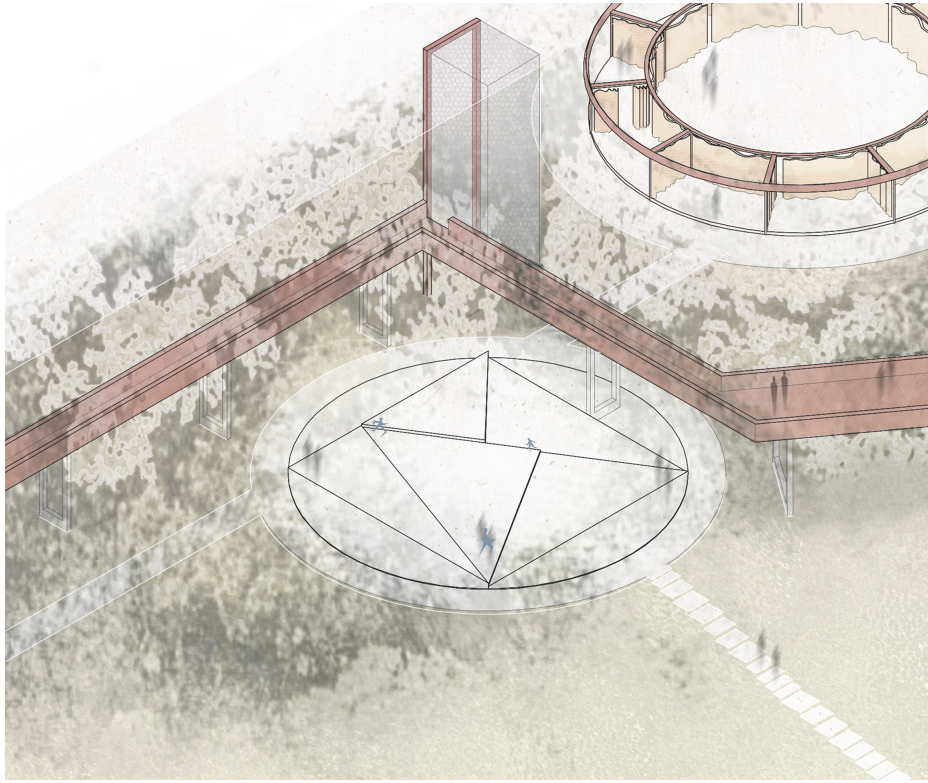
$$\frac{a(0) + b(0) + c(0)}{9/2} \leq t_c \leq \frac{a(0) + b(0) + c(0)}{4}$$

### 4.3. Adaptación del Problema al Parque

El experimento descrito en el planteamiento del problema puede ser fácilmente puesto en práctica obteniéndose buenos resultados (con un poco de coordinación). El resultado por lo general deja al público satisfecho, y tras varias realizaciones puede llegar a convencer incluso a los más empiristas.

Sin embargo, pese a lo curioso del dato, no es una práctica que suela ocurrírsele a la gente. En el parque se ha diseñado una plaza con triángulos de diferentes formas y dimensiones para poner en práctica el experimento, que queda perfectamente explicado en los carteles situados a la entrada de ésta.

Este experimento además de ser sorprendente para aquellos que lo están realizando, también lo es para los que lo observan desde la pasarela con más perspectiva.





# Capítulo 5

## El Problema del Pato y el Perro

### 5.1. Planteamiento

Un perro se encuentra en el centro de un lago circular, y quiere atrapar a un pato que se mueve a velocidad constante por el borde del lago recorriéndolo en sentido antihorario. El perro nada a velocidad constante y persigue de forma directa al pato, apuntando siempre hacia la posición donde éste se encuentra.

El objetivo del problema es tratar de obtener la ecuación de la curva de persecución que describe el perro sabiendo que la razón entre la velocidad del perro y la velocidad del pato es igual a  $k$ .

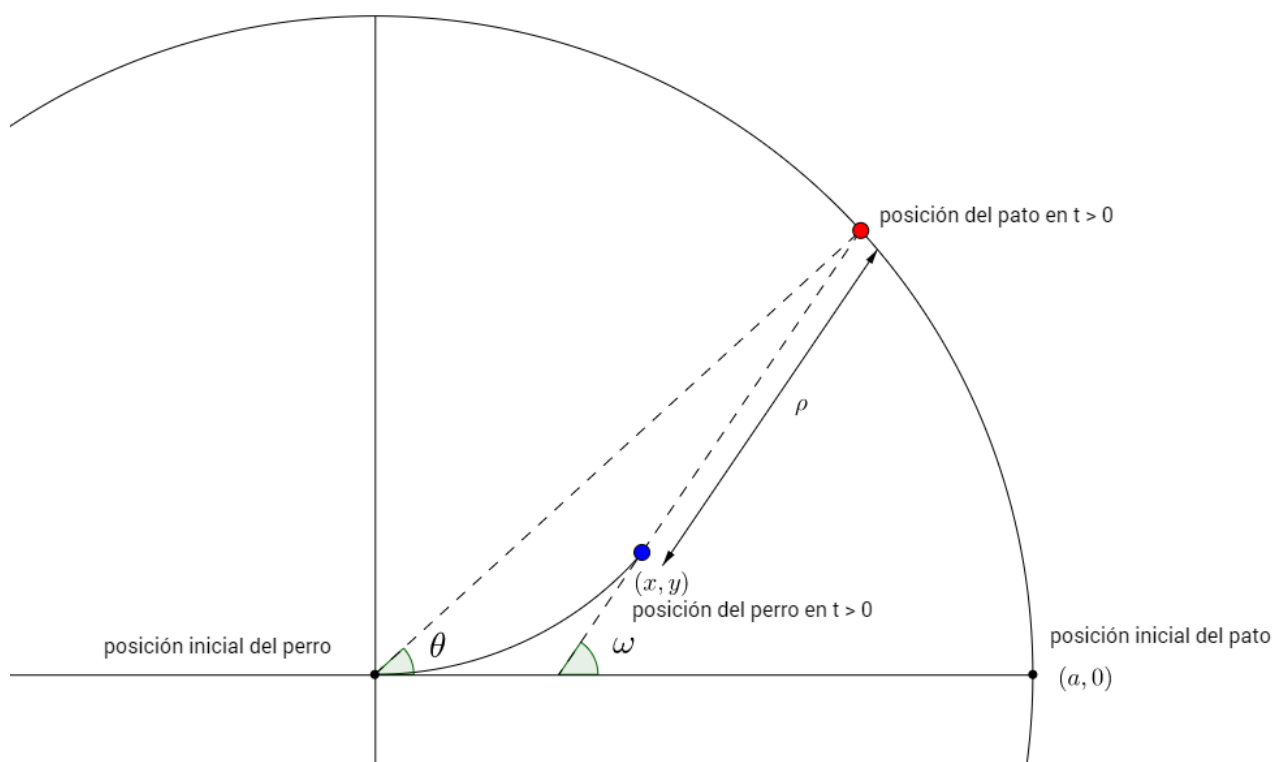
Notación: Denotaremos por PE al perro y por PA al pato.

## 5.2. Resolución

### Caracterización de la Curva de Persecución

En un principio trabajaremos con coordenadas cartesianas. En el instante inicial,  $t = 0$ , PE se encontrará en el punto  $(0, 0)$  (el centro del lago), y PA en el punto  $(a, 0)$  (siendo  $a$  el radio del lago).

A continuación vemos un imagen de la persecución para un instante de tiempo  $t > 0$ .



donde puede verse que PE ha empezado a perseguir a PA hasta llegar al punto  $(x, y)$  encontrándose a una distancia  $\rho$  de éste.

En este momento PA ha recorrido una distancia  $a\theta$ , por lo que PE que se mueve a  $k$  veces la velocidad de PA habrá recorrido una distancia  $l = ka\theta$ .

En la figura también está representada la recta tangente al punto  $(x, y)$  con pendiente  $\tan(\omega)$ . Cuya ecuación viene determinada, para alguna constante  $b$ , por

$$y = x \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)} + b,$$

ahora bien, la recta pasa por el punto  $(a \cos(\theta), a \sin(\theta))$  (posición de PA), luego

$$a \sin(\theta) = a \cos(\theta) \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)} + b,$$

y despejando  $b$  podemos dar la siguiente ecuación de la recta tangente a la curva de persecución

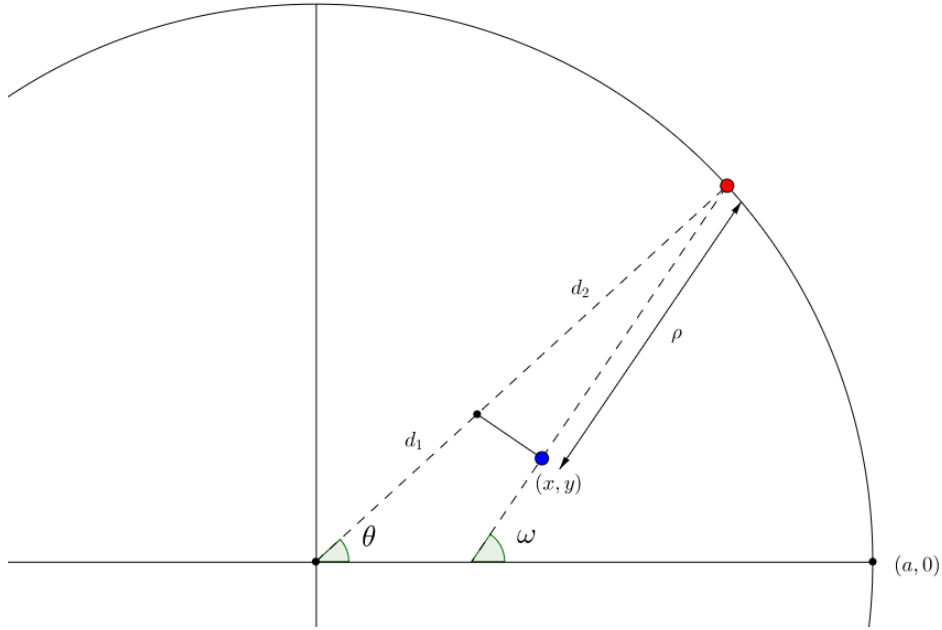
$$x \sin(\omega) - y \cos(\omega) = a \sin(\omega - \theta) \quad (5.1)$$

Determinada esta ecuación, vamos a obtener ahora la ecuación de la recta normal a la curva de persecución.

Sabemos que tiene pendiente  $-1/\tan(\omega) = -\cos(\omega)/\sin(\omega)$ , y de nuevo para alguna constante  $c$  la ecuación de la recta será

$$y = -x \frac{\cos(\omega)}{\sin(\omega)} + c$$

Para determinar  $c$  necesitamos conocer otro punto por el que pase la recta, para ello dividimos en dos partes el radio que va desde el centro hasta la posición de PA como se ve en la siguiente imagen



con  $d_1 + d_2 = a$ , donde

$$d_2 = \frac{\rho}{\cos(\omega - \theta)},$$

puesto que el ángulo que forma PA con los dos segmentos discontinuos de la imagen es  $\omega - \theta$ . Entonces despejando  $d_1$ , punto por el que pasa la recta normal,

$$d_1 = a - \frac{\rho}{\cos(\omega - \theta)} = \frac{a \cos(\omega - \theta) - \rho}{\cos(\omega - \theta)},$$

se obtiene que el valor de  $b$  es

$$c = \frac{a \cos(\omega - \theta) - \rho}{\sin(\omega)},$$

y por lo tanto la ecuación de la recta normal viene dada por

$$x \cos(\omega) + y \sin(\omega) = a \cos(\omega - \theta) - \rho \quad (5.2)$$

Determinadas las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la curva de persecución procedemos a calcular dos ecuaciones diferenciales para  $\omega$  y  $\rho$  en función de  $\theta$  que determinan esta curva.

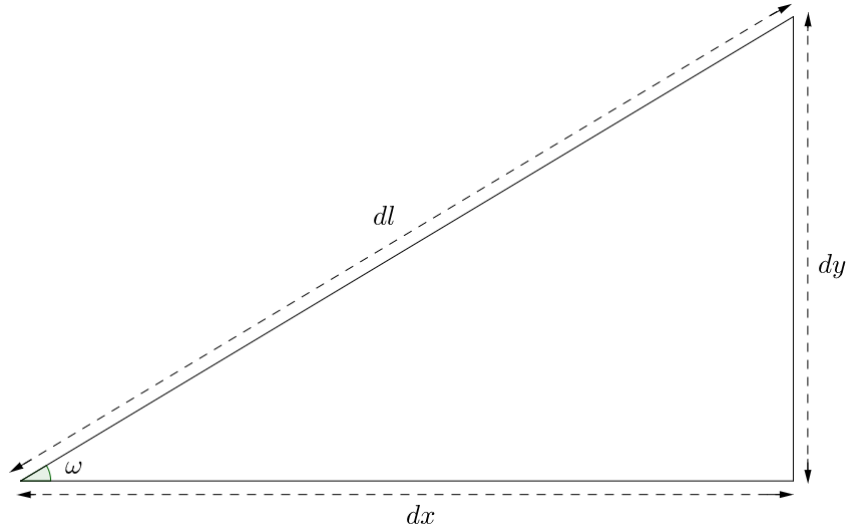


Comenzamos derivando (5.1) respecto de  $\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} \text{sen}(\omega) - \frac{dy}{d\theta} \cos(\omega) + \frac{d\omega}{d\theta} [x \cos(\omega) + y \text{sen}(\omega)] = a \cos(\omega - \theta) \left( \frac{d\omega}{d\theta} - 1 \right),$$

sustituyendo ahora la expresión en corchetes por su valor en (5.2) y haciendo algunas operaciones obtenemos

$$\frac{dx}{d\theta} \text{sen}(\omega) - \frac{dy}{d\theta} \cos(\omega) - \rho \frac{d\omega}{d\theta} = -a \cos(\omega - \theta) \quad (5.3)$$



podemos ver que

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\omega),$$

y también, como PE ha recorrido una distancia  $l = ka\theta$

$$dl = \frac{dx}{\cos(\omega)} = ka \, d\theta,$$

y en consecuencia

$$\frac{dx}{d\theta} = ka \cos(\omega)$$

Entonces por la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = \tan(\omega)ak \cos(\omega) = ak \sin(\omega)$$

Sustituyendo ahora los valores de  $\frac{dx}{d\theta}$  y  $\frac{dy}{d\theta}$  en (5.3) obtenemos nuestra primera ecuación diferencial

$$\boxed{\rho \frac{d\omega}{d\theta} = a \cos(\omega - \theta)} \quad (5.4)$$

Para obtener la siguiente ecuación diferencial comenzamos de nuevo derivando (5.1) respecto de  $\theta$ , obteniendo la siguiente igualdad

$$\frac{dx}{d\theta} \cos(\omega) + \frac{dy}{d\theta} \sin(\omega) - \frac{d\omega}{d\theta} [x \sin(\omega) - y \cos(\omega)] = -a \sin(\omega - \theta) \left( \frac{d\omega}{d\theta} - 1 \right) - \frac{d\rho}{d\theta},$$

donde sustituyendo la expresión en corchetes por su valor en (5.1) obtenemos

$$\frac{dx}{d\theta} \cos(\omega) + \frac{dy}{d\theta} \sin(\omega) = a \sin(\omega - \theta) - \frac{d\rho}{d\theta},$$

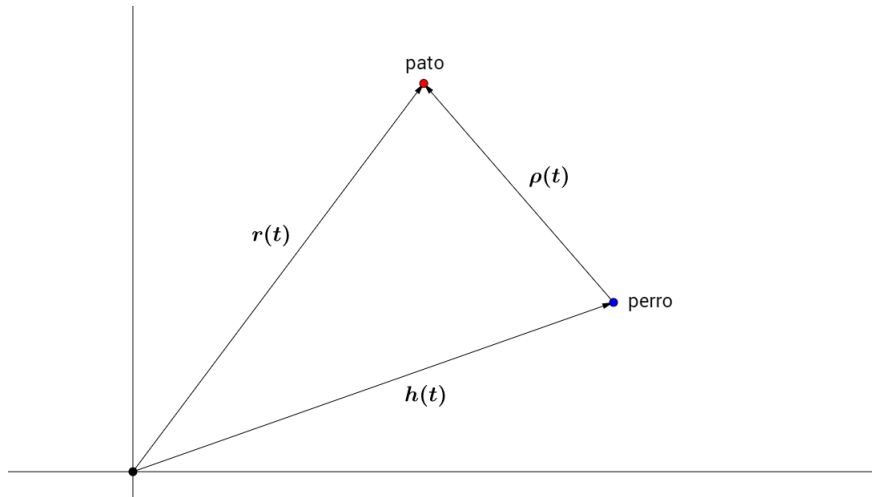
finalmente despejando el valor de  $\frac{dx}{d\theta}$  y  $\frac{dy}{d\theta}$  en la expresión anterior obtenemos la segunda ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{d\rho}{d\theta} = a [\sin(\omega - \theta) - k]} \quad (5.5)$$

Hemos obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza la curva de persecución, sin embargo éste no es resoluble de forma analítica. Aun así podemos dar una solución interpretable por un ordenador para obtener una solución computacional aproximada.

## Solución Computacional

En la siguiente imagen se ven representados los vectores de posición de PA y PE,  $r(t)$  y  $h(t)$ , además del vector  $\rho(t)$  con origen PE y final PA.



Estos pueden identificarse como

$$r(t) = x_r(t) + iy_r(t)$$

$$h(t) = x_h(t) + iy_h(t)$$

$$\rho(t) = r(t) - h(t)$$

Sabemos que  $\frac{dh(t)}{dt}$  tiene la misma dirección que el vector  $\rho(t)$ , luego podemos escribir

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left| \frac{dh(t)}{dt} \right| \cdot \frac{\rho}{|\rho(t)|}$$

Por otro lado el vector velocidad de PA viene dado por

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{dx_r(t)}{dt} + i \frac{dy_r(t)}{dt},$$

con módulo

$$\left| \frac{dr(t)}{dt} \right| = \sqrt{\left( \frac{dx_r(t)}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_r(t)}{dt} \right)^2}$$

Entonces, como PE es  $k$  veces "más rápido" que PA, el vector velocidad de PE es

$$\begin{aligned}\frac{dh(t)}{dt} &= k \sqrt{\left(\frac{dx_r(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r(t)}{dt}\right)^2} \cdot \frac{\rho(t)}{|\rho(t)|} \\ &= k \sqrt{\left(\frac{dx_r(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r(t)}{dt}\right)^2} \cdot \frac{r(t) - h(t)}{|r(t) - h(t)|},\end{aligned}$$

igualdad que podemos reescribir como

$$\frac{dx_h}{dt} + i \frac{dy_h}{dt} = k \sqrt{\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2} \cdot \frac{(x_r - x_h) + i(y_r - y_h)}{\sqrt{(x_r - x_h)^2 + (y_r - y_h)^2}},$$

de donde igualando las partes real e imaginaria obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para  $x_h$  e  $y_h$

$$\begin{aligned}\frac{dx_h}{dt} &= k \sqrt{\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2} \cdot \frac{x_r - x_h}{\sqrt{(x_r - x_h)^2 + (y_r - y_h)^2}} \\ \frac{dy_h}{dt} &= k \sqrt{\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2} \cdot \frac{y_r - y_h}{\sqrt{(x_r - x_h)^2 + (y_r - y_h)^2}}\end{aligned}$$

Nótese que estas ecuaciones son muy generales ya que se verifican para todo tipo de persecución directa entre PE y PA. Si nos restringimos a nuestro caso, podemos suponer que PA realiza un movimiento circular en sentido antihorario por el borde de un círculo de radio 1 a velocidad constante 1, de manera que

$$x_r(t) = \cos(t) \qquad y_r(t) = \sin(t)$$

Por lo tanto obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para nuestra curva de persecución

$$\frac{dx_h}{dt} = k \sqrt{\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2} \cdot \frac{x_r - x_h}{\sqrt{(\cos(t) - x_h)^2 + (y_r - y_h)^2}}$$

$$\frac{dy_h}{dt} = k \sqrt{\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2} \cdot \frac{\sin(t) - y_h}{\sqrt{(x_r - x_h)^2 + (y_r - y_h)^2}}$$

válidas para cualquier posición inicial de PE. En el problema original la posición inicial de PE es  $(0,0)$ , pero con este sistema podemos resolver computacionalmente el mismo problema para cualquier posición inicial de PE en el lago, e incluso (si suponemos que PE corre y nada a la misma velocidad) para posiciones iniciales fuera del lago.

A continuación vemos secuencias de la curva de persecución de PE para diferentes posiciones iniciales con valores de  $k$  tomados entre 0 y 1 (nos restringimos a este caso puesto que para  $k > 1$  es trivial que se da la captura), donde los diferentes colores que van apareciendo en el borde distinguen las vueltas de PA.

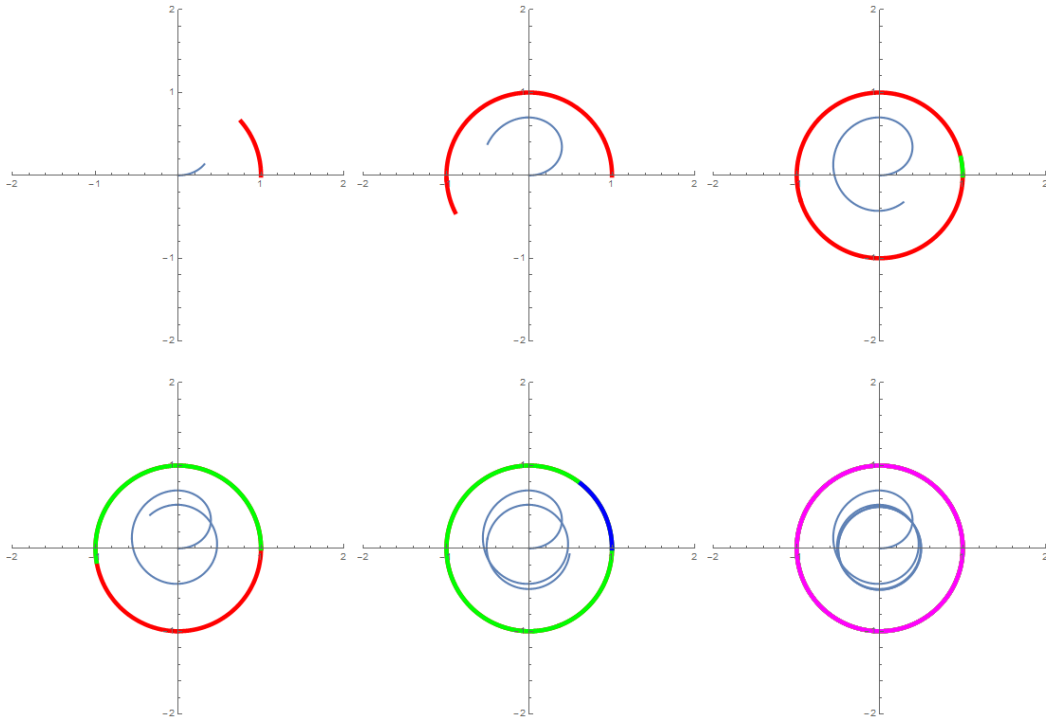


Figura 5.1: Posición inicial  $(0,0)$ , con  $k = 0,5$

Aquí parece que para valores grandes de  $t$  PE comienza a dar vueltas en una circunferencia de radio menor que 1

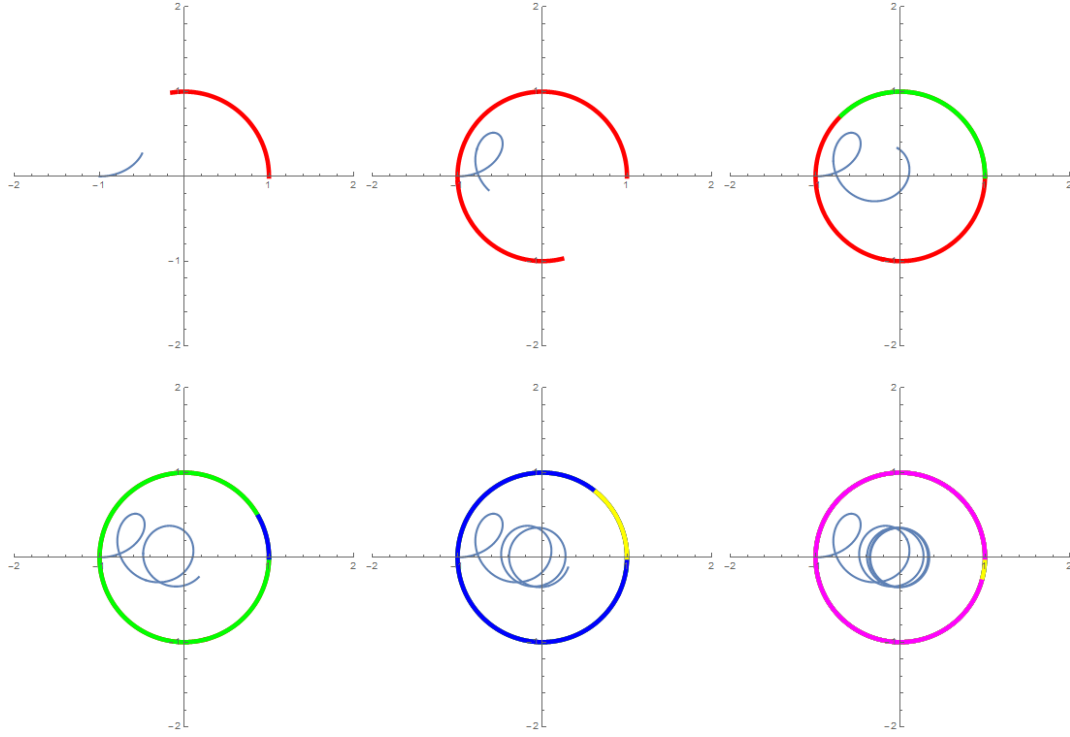


Figura 5.2: Posición inicial  $(-1, 0)$ , con  $k = 0,35$

Como antes se observa un movimiento circular de radio menor que 1.

### Circunferencias límite

El objetivo de este apartado es demostrar que cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $k < 1$  la curva de persecución de PE es la descrita por un movimiento circular uniforme de radio  $k$  y centro  $(0, 0)$ . A la circunferencia de radio  $k$  la llamaremos circunferencia límite.

Comenzamos definiendo el ángulo  $\phi = \omega - \theta$ , con  $\omega$  y  $\theta$  los ángulos del apartado anterior. Entonces se verifica que  $d\omega/dt = d\phi/dt + 1$  (estamos tomando radio del lago = velocidad de PA = 1), por lo tanto (5.4) se transforma en

$$\rho \frac{d\phi}{dt} + \rho = \cos(\phi), \quad (5.6)$$

y (5.5) en

$$\frac{d\rho}{dt} = \text{sen}(\phi) - k \quad (5.7)$$

Derivando esta última tenemos que

$$\frac{d^2\rho}{d^2t} = \cos(\phi) \frac{d\phi}{dt},$$

de donde

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d^2\rho}{d^2t} \cdot \frac{1}{\cos(\phi)}$$

Sustituyendo ahora el valor de  $\frac{d\phi}{dt}$  en (5.6) obtenemos la siguiente igualdad

$$\rho \frac{d^2\rho}{d^2t} + \rho \cos(\phi) = \cos^2(\phi)$$

En el caso de ocurrir, en el momento en el que una solución toma un valor de  $\rho$  constante debe verificarse que  $d\rho/dt = d^2\rho/d^2t = 0$ .

También podemos ver que cuando  $t \rightarrow \infty$  en (5.6) y (5.7) se verifican para el límite las igualdades  $\rho = \cos(\phi)$  y  $\text{sen}(\phi) = k$ .

Entonces si la solución constante ocurre cuando  $t \rightarrow \infty$  la igualdad anterior debe cumplir las condiciones previamente citadas, obteniéndose

$$0 + \rho \cdot \rho = 1 - \text{sen}^2(\phi) = 1 - k^2,$$

de donde deducimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \sqrt{1 - k^2}$$

Con esto queda probado que existe una solución de  $\rho$  constante cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para averiguar el radio del movimiento circular que describe (que llamaremos  $R$ ) recurrimos al teorema de Pitágoras  $R^2 + \rho^2 = 1$ , de donde sustituyendo el valor de  $\rho$  en el límite se obtiene

$$R = k$$

### 5.3. Adaptación del Problema al Parque

La instalación, como en el problema de la Persecución Triangular, está pensada para poner en práctica la situación tratada en el problema.

Una persona actúa de pato y otra de perro. El problema está pensado para realizar con los patinetes eléctricos. Quien hace de pato debe dar vueltas por encima de la línea marcada en el borde de la plaza, y quien hace de perro debe perseguirlo en persecución directa.

La velocidad indicada para quien hace de perro es menor que la de quien hace de pato, por lo tanto el resultado final serán dos personas dando vueltas en círculos por encima de las circunferencias trazadas en la plaza.



## Capítulo 6

# El Problema del Monstruo y la Princesa

### 6.1. Planteamiento

Un temible monstruo persigue a una princesa por la mazmorra de un castillo. Esta mazmorra está formada por un conjunto de celdas conectadas por túneles, teniendo todos los túneles la misma longitud. De cada celda salen dos túneles que la conectan con otras dos celdas.

El monstruo y la princesa se mueven a la misma velocidad constante, pero sus movimientos están restringidos. Cada vez que entran en un túnel deben recorrerlo por completo y no pueden parar al llegar a una nueva celda sino que deben escoger otro túnel, es decir están en continuo movimiento. Además debido a la disposición de las celdas y a la infraestructura de la mazmorra, en ningún momento durante la persecución tienen información sobre la posición del otro (salvo en el momento inicial, donde  $P$  conoce la posición de  $M$ ).

El objetivo del monstruo es capturar cuanto antes a la princesa. Totalmente contrario al de la princesa que es retrasar al máximo la posible captura, esperando ser rescatada.

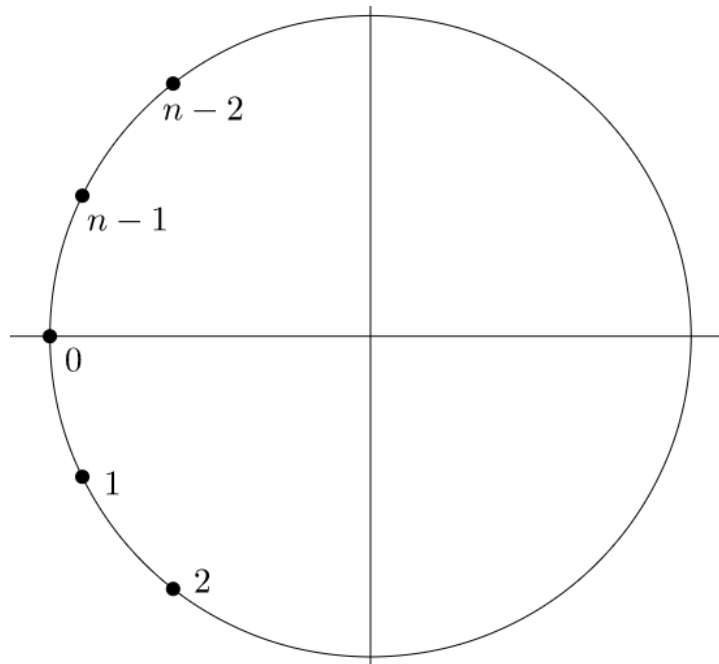
Lo que haremos en este problema será describir las estrategias óptimas que deben llevar a cabo el monstruo y la princesa.

## 6.2. Descripción

### Consideraciones Previas

Notación: Denotaremos por M al monstruo y por P a la princesa

El número natural  $n \geq 3$  representará el número de puntos (celdas) que hay distribuidas uniformemente en el túnel.



La persecución comienza en el instante de tiempo  $t_0 = 0$ . Por el movimiento continuo que siguen M y P podemos discretizar el tiempo  $t = t_0, t_1, t_2, \dots$  de manera que en cada  $t_i$  M y P se encuentran cada uno en un punto, y para avanzar del instante  $t_i$  al instante  $t_{i+1}$  M y P avanzarán un punto en sentido horario o antihorario (en ningún momento

tienen información sobre el movimiento del otro).

Definimos entonces las siguientes situaciones que implican una captura de P:

- (a) partiendo de un instante  $t_i$ , al realizar sus movimientos ambos están en el mismo punto en el instante  $t_{i+1}$
- (b) partiendo de un instante  $t_i$ , al realizar sus movimientos la posición de P en  $t_i + 1$  es igual a la posición de M en  $t_i$  y la posición de M en  $t_i + 1$  es la posición de P en  $t_i$  (esto implicaría una captura en mitad del túnel).

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que en el instante inicial M se encuentra en el punto 0, entonces definimos otro parámetro  $j$  como el número en el que se encuentra P en el instante inicial, con  $1 \leq j \leq n - 1$ .

Establecidos  $n$  y  $j$  podemos definir un tercer parámetro  $v$  como sigue.

$$v = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right) - 1 & \text{si } n \text{ y } j \text{ son pares} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{si } n \text{ y } j \text{ no son ambos pares} \end{cases}$$

Definidos estos parámetros podemos establecer las secuencias de escape de P, que serán utilizadas en su estrategia óptima.

## Secuencias de Escape de P

En este apartado vamos a limitarnos a describir las secuencias de escape de P en función de  $n$  y  $j$ . La extensa prueba puede verse en Wilson, D.J., "Isaac's Princess and Monster Game on the Circle", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 9 1972 (no. 4)

Para indicar los movimientos que sigue P en cada instante utilizaremos  $\pm 1$ , donde

$+1 \Rightarrow$  avanza una posición en sentido antihorario

$-1 \Rightarrow$  avanza una posición en sentido horario

Vamos a definir las 4 secuencias en función de la paridad de  $n$  y  $j$ .

(S1)  $n$  par y  $j$  impar

$$-1 \text{ para } t = t_k, \text{ con } 1 \leq k \leq \frac{j-1}{2}$$

$$+1 \text{ para } t = t_k, \text{ con } \frac{j+1}{2} \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$$

(S2)  $n$  impar y  $j$  impar

$$-1 \text{ para } t = t_k, \text{ con } 1 \leq k \leq \frac{j-1}{2}$$

$$+1 \text{ para } t = t_k, \text{ con } \frac{j+1}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2} - 1$$

(S3)  $n$  impar y  $j$  par

$$-1 \text{ para } t = t_k, \text{ con } 1 \leq k \leq \frac{j}{2} - 1$$

$$+1 \text{ para } t = t_k, \text{ con } \frac{j}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2} - 1$$

(S4)  $n$  par y  $j$  par

$$-1 \text{ para } t = t_k, \text{ con } 1 \leq k \leq \frac{j}{2} - 1$$

$$+1 \text{ para } t = t_k, \text{ con } \frac{j}{2} \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$$

## Estrategias Óptimas

Establecidas las secuencias de escape estamos en condiciones de describir las estrategias óptimas para M y P. El desarrollo en profundidad de éstas puede verse en el artículo citado anteriormente.

- Estrategia óptima para M:

M "tomará" decisiones sobre sus movimientos en los instantes  $t = 1, v+1, \dots, mv+1, \dots$  con  $m \in \mathbb{N}$ . Éstas serán avanzar durante los siguientes  $v$  movimientos con probabilidad  $\frac{1}{2}$  en sentido horario y con probabilidad  $\frac{1}{2}$  en sentido antihorario.

- Estrategia óptima para P:

Durante los primeros  $v - 1$  movimientos P se moverá de acuerdo con la secuencia de escape adecuada según los valores de  $n$  y  $j$ , estrategia que le garantiza seguridad durante estos movimientos. Transcurridos los  $v - 1$  movimientos P adoptará la estrategia de M, tomando decisiones en los instantes  $t = v, 2v, \dots, mv, \dots$  con  $m \in \mathbb{N}$ .

Con estas estrategias, la duración media de la persecución viene dada por

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{qv}{2^q} = \frac{v}{2} + \frac{2v}{4} + \frac{3v}{8} + \frac{4v}{16} \dots = 2v$$

### Caso Particular: $n = 10$ y $j = 5$

En este caso,  $v = \lfloor \frac{10}{2} \rfloor = 5$  (la persecución durará en media 10 movimientos).

Entonces con probabilidad  $\frac{1}{2}$  M avanzará 5 posiciones en sentido horario y con probabilidad  $\frac{1}{2}$  en sentido antihorario, repitiendo este proceso hasta la captura.

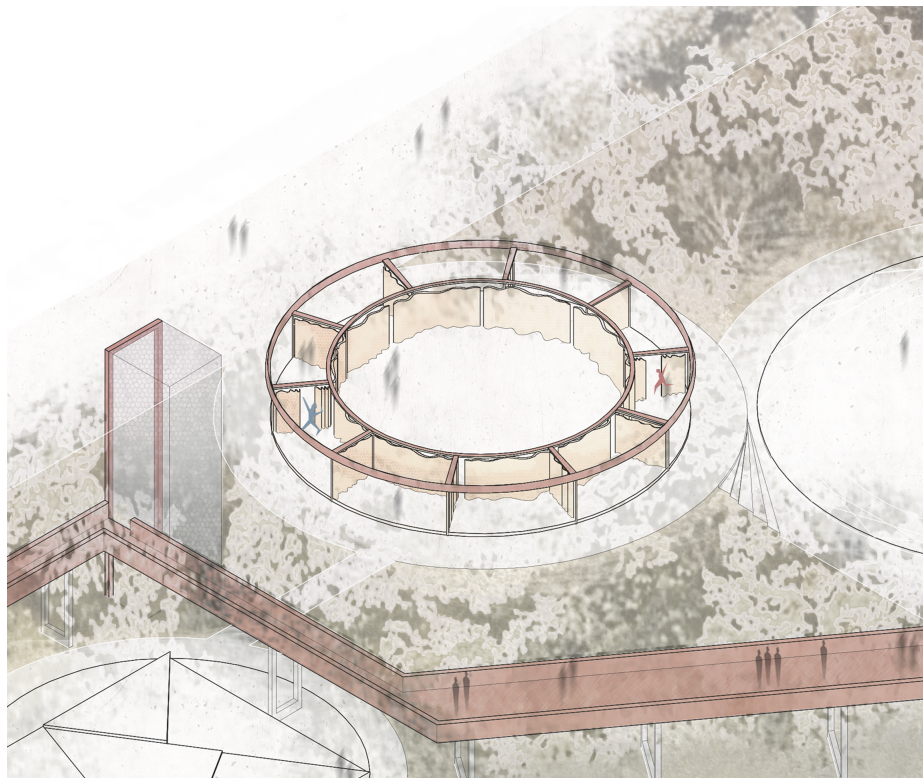
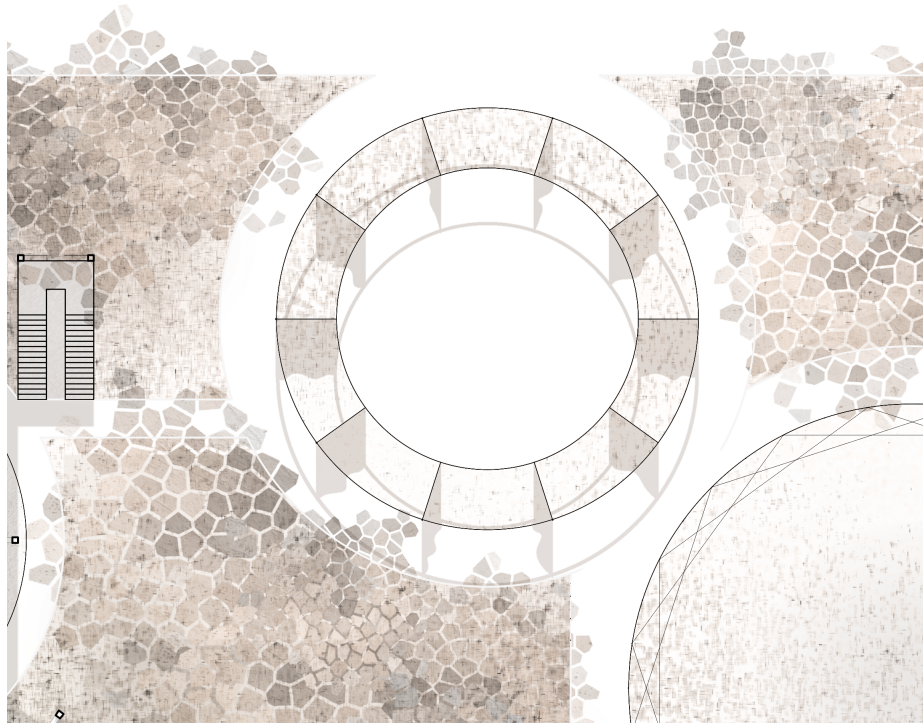
Por otro lado como  $n = 10$  y  $j = 5$ , P utilizará la secuencia S1 de escape, de manera que avanzará dos posiciones en sentido horario y dos posiciones en sentido antihorario en los siguientes 2 movimientos (volviendo a su posición inicial). Tras esto comenzará a actuar como M.

### 6.3. Adaptación al Parque

En esta instalación puede verse en la imagen 10 cubículos separados por unas ligeras cortinas. Cada cubículo actúa a modo de celda, y las cortinas como túneles.

El juego comienza con el perseguidor (el monstruo) en el cubículo 0, y con el perseguido (la princesa) en el cubículo 5. En las instrucciones se describen las estrategias óptimas para ambos. Para la realización es necesario que cada uno tenga una moneda (para poder escoger con probabilidad  $1/2$ ), además de una tercera persona que hace sonar una campana para ir indicando cuando deben moverse de celda.

Siguiendo las estrategias óptimas la captura debe ocurrir tras 15 movimientos en aproximadamente el 90 % de los casos. En consecuencia se sugiere que se realicen 15 movimientos. También se invita a probar estrategias diferentes de las óptimas, llegando a capturas más rápidas o más lentas, según sea quien cambie de estrategia.







# Bibliografía

- [1] Paul J. Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*. Princeton University Press, Princeton (2007).
- [2] Richardson T. J., *Non-mutual Captures in Cyclic Pursuit*. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 31 (2001), 127-146.
- [3] Finch S. R., *Lost in a Forest*. *American Mathematical Monthly*, (2004), 645-655.
- [4] Wilson D. J., *Isaac's Princess and Monster Game on the Circle*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 9 (1972), 255-288.